FAN*

VI seria zadań domowych,
termin: 19 listopada, godzina 8.30

Zadania z poprzedniej serii:

1 (P)**.** Dane jest $a \in (-1, 1)$. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx.$$

Wskazówka: rozpatrzeć funkcję $f(z) = \frac{z^a}{1-z^2}$*, gdzie* $z^a = e^{a \operatorname{Log} z}$*, zaś* Log *jest gałęzią główną logarytmu na* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2 (P)**.** Dane jest $a > 0$. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx.$$

Nowe zadania:

3 (P – każdy podpunkt wart jest jeden punkt)**.** Obliczyć

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx,$$

$$\text{(c)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\,dt \quad \text{dla wszystkich } a \text{ spełniających } |a| \neq 1.$$

4 (P)**.** Czy istnieje gałąź pierwiastka kwadratowego funkcji $f(z) = z^2 + z - 1$ na obszarze $U = \{|z| > 10\}$? Innymi słowy: czy istnieje ciągłe $g\colon U \to \mathbb{C}$ spełniające $(g(z))^2 = f(z)$ dla $z \in U$?

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje całkowite f spełniające $|f(z) - f'(z)| = 1$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

6. Załóżmy, że f jest funkcją całkowitą, której obraz $f(\mathbb{C})$ nie jest gęsty w $\mathbb{C}$. Wykazać, że f jest stała.

7. Niech U będzie obszarem zawierającym domknięty dysk jednostkowy $\{|z| \leqslant 1\}$. Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna, zaś P jest wielomianem monicznym[1]. Wykazać, że

$$|f(0)| \leqslant \max_{|z|=1} |f(z)P(z)|.$$

8 (P)**.** Załóżmy, że funkcje $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ są holomorficzne w obszarze U. Wykazać, że jeśli $|f| + |g|$ osiąga lokalne maksimum w U, to f i g są funkcjami stałymi.

[1]To znaczy takim, że współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 1.