FAN*

V seria zadań domowych,
termin: 12 listopada, godzina 8.30

1. Niech $I_R = \int_{|z|=R} \frac{z^2+9}{z^4+3z^2+2}\,dz$ dla $R > 2$. Wykazać, że $I_R = 0$ dla każdego $R > 2$.

2. Dany jest wielomian P stopnia co najwyżej n. Wykazać, że dla każdego $a \in D(0,R)$ zachodzi
$$\int_{S(0,R)} \frac{P(z)}{z^{n+1}(z-a)}\,dz = 0.$$

3. Liczba zespolona z spełnia $|z| \neq 1$. Obliczyć
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(e^{2\pi ik/n})}{1 - ze^{-2\pi ik/n}}$$
lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

4 (P – zadanie warte 3 punkty)**.** Niech $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Obliczyć $\int_0^\infty f(x)\,dx$ oraz $\int_0^\infty (f(x))^3\,dx$. Wykazać, że $\int_0^\infty (f(x))^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$.

Ze względu na długi weekend rozwiązania poniższych dwóch zadań można oddawać do 19 listopada, do 8.30. Proszę jednak pamiętać, że 12 listopada otrzymają Państwo kolejną pełnowymiarową serię zadań domowych.

5 (P)**.** Dane jest $a \in (-1,1)$. Obliczyć wartość całki
$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx.$$
Wskazówka: rozpatrzeć funkcję $f(z) = \frac{z^a}{1-z^2}$*, gdzie* $z^a = e^{a \operatorname{Log} z}$*, zaś* Log *jest gałęzią główną logarytmu na* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

6 (P)**.** Dane jest $a > 0$. Obliczyć wartość całki
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx.$$