FAN*

IV seria zadań domowych,
termin: 5 listopada, godzina 8.30

1. (P) Załóżmy, że $u : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ jest harmoniczna. Wykazać, że u jest stała.

2 (Przeniesione do serii V)**.**

3 (P)**.** Niech $\gamma(t) = t - i \sin t$ dla $t \in [-\pi, \pi]$.

(a) Dla każdej z funkcji $\frac{1}{z+1}$ i $\frac{1}{z-1}$ wskazać obszar (obszary dla poszczególnych funkcji mogą się od siebie różnić) zawierający obraz krzywej γ i funkcję pierwotną danej funkcji na tym obszarze. Należy podać te funkcje pierwotne w sposób jawny, bez użycia całek.

(b) Obliczyć $\int_\gamma f$, gdzie $f(z) = \frac{2z}{z^2-1}$.

(c) Czy to prawda, że $\int_\gamma f = \int_\eta f$ dla każdej krzywej gładkiej η łączącej $-\pi$ z π omijającej punkty -1 oraz 1?

4. Niech $\gamma \colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $\gamma(t) = 2e^{it}$. Policzyć

$$\int_\gamma \frac{z}{z^2+1}\, dz,$$

wskazując obszar U zawierający $\gamma^* = \gamma([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ i funkcję pierwotną F (wyrażoną jawnie, bez użycia całek) funkcji podcałkowej $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ na U, a następnie korzystając z zależności

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F\Big(\gamma(\pi/2)\Big) - F\Big(\gamma(-\pi/2)\Big).$$

5. Wykazać, że dla $A > 0$ zachodzi

$$\int_0^{\pi/2} e^{-A \sin t}\, dt = O\Big(\frac{1}{A}\Big).$$