FAN*

III seria zadań domowych,
termin: 29 października, godzina 8.30

1 (P)**.** Wykazać, że $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

2 (P)**.** Załóżmy, że zarówno $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jak i f' są holomorficzne[1] oraz że f spełnia równanie

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = e^{2xy} \cos(x^2 - y^2) \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}.$$

Wyzaczyć $f'(0)$ oraz $f''(0)$.

3. Dla danego obszaru $U \subset \mathbb{C}$ definiujemy obszar $V = \{z \in \mathbb{C}\colon \overline{z} \in U\}$. Wykazać, że jeśli f jest holomorficzna w U, to funkcja zadana wzorem $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ jest holomorficzna w V.

4. Niech $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Wyznaczyć $\int_{S(0,r)} \overline{P(z)} dz$. (Jeśli nie zaznaczono inaczej, okręgi zawsze mają domyślną orientację przeciwną do ruchu wskazówek zegara.)

5. (P) Niech $R > 0$. Wykazać, że istnieje stała $C(R) \in (0, \infty)$ zależna tylko od R, taka że dla wszystkich $z \in D(0, R)$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi oszacowanie

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant |z|^n C(R).$$

Wykazać, że $C(R)$ można dobrać tak, by $\lim_{r\to 0^+} C(r) = 1$.

[1] Jak się przekonamy – albo już się przekonaliśmy – na wykładzie, holomorficzność f' wynika z holomorficzności f.