FAN*

II seria zadań domowych,
termin: 22 października, godzina 8.30

1 (P)**.** Załóżmy, że $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ma pochodną zespoloną w punkcie $z = 0$ oraz spełnia $f(0) = f'(0) = 1$ i $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$ dla wszystkich $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wykazać, że $f(z) = \exp(z)$.

2. Wyznaczyć homografię przekształcającą obszar między okręgami $\{z\colon |z| = 2\}$ i $\{z\colon |z-1| = 1\}$ na pas $\{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Re} z| < 1\}$.

3. Znaleźć $r \in (0,1)$ oraz homografię przekształcającą obszar $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z < 1/2, |z+2| > 2\}$ na pierścień $\{z \in \mathbb{C}\colon r < |z| < 1\}$.

4 (P)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dana jest wzorem

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{if } z \neq 0, \\ 0 & \text{if } z = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że:

(a) f ma pochodne cząstkowe w 0,
(b) pochodne cząstkowe f w 0 spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna,
(c) f nie ma pochodnej zespolonej w 0.

5. Wykazać, że $\frac{\partial}{\partial z}(z^k \overline{z}^l) = kz^{k-1}\overline{z}^l$ oraz $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z^k \overline{z}^l) = lz^k \overline{z}^{l-1}$.

6. Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest holomorficzna na obszarze U oraz[1] że $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ są klasy $C^2(U)$. Wykazać, że funkcja $z \mapsto \ln|f(z)|$ jest harmoniczna.

Definicja 1. Powiemy, że funkcja w jest harmonicznym sprzężeniem funkcji harmonicznej $u : U \to \mathbb{R}$, jeśli $u + iw$ jest funkcją holomorficzną na U.

Co więcej, z równań Cauchy'ego-Riemanna wynika, że $w \in C^2(U)$ jest sprzężeniem harmonicznym funkcji harmonicznej[2] $u \in C^2(U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy w jest harmoniczna, $u_x = w_y$ oraz $u_y = -w_x$.

7 (P)**.** (Długie rozwiązania nie będą oceniane ani punktowane.) Dana jest funkcja harmoniczna $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ klasy[3] C^3 i jednorodna stopnia $\alpha > 0$. Wykazać, że funkcja $w = \frac{1}{\alpha}(yu_x - xu_y)$ jest harmonicznym sprzężeniem funkcji u. Wykorzystać ten fakt do znalezienia sprzężenia harmonicznego funkcji $x^2 + 2xy - y^2$.

[1] Jak przekonamy się później, można pominąć założenie, że $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^2(U)$, gdyż wynika ono z holomorficzności f na U.

[2] Założenie o klasie C^2 można pominąć, bo wynika ono z harmoniczności.

[3] Założenie o klasie C^3 można pominąć, bo wynika ono z harmoniczności.