FAN*

I seria zadań domowych,
termin: 15 października, godzina 8.30

1 (P)**.** Dane są $n \geqslant 1$ i wielomian $P_n(z) = 1 + \frac{z}{4} + \ldots + \frac{z^n}{4^n}$. Wykazać, że dla liczb zespolonych $a \neq b$ spełniających $|a|, |b| < 1$ zachodzi $|P_n(a) - P_n(b)| > \frac{1}{18}|a - b|$.

2. Wyznaczyć iloczyn wszystkich rozwiązań (licząc z krotnościami) równania

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z - \varepsilon_k} = 0,$$

gdzie ε_k to różne od 1 pierwiastki stopnia n z jedynki (tzn. rozwiązania równania $z^n = 1$ oprócz $z = 1$).

3. Niech $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ będą pierwiastkami stopnia n z jedynki (patrz poprzednie zadanie). Wyznaczyć $\prod_{k \neq l}(\varepsilon_k - \varepsilon_l)$.

4. Dany jest wielomian $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ o współczynnikach dodatnich. Wykazać, że wszystkie pierwiastki P są zawarte w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : r \leqslant |z| \leqslant R\}$, gdzie

$$r = \min\left\{\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}, \qquad R = \max\left\{\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}.$$

5. Dla wielomianu $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ definiujemy wielomian $Q(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}z + \ldots + \bar{a}_0 z^n$. Załóżmy, że wszystkie pierwiastki P leżą we wnętrzu dysku jednostkowego, czyli w zbiorze $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$. Wykazać, że jeśli $|\gamma| = 1$, to wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z) + \gamma Q(z)$ leżą na okręgu jednostkowym $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

Przypomnijmy, że $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

6 (P)**.** Niech $r > 0$ i $a \in \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \neq r\}$. Wykazać, że $z \mapsto 1/z$ przekształca:

(a) okrąg $S(a, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a| = r\}$ na okrąg $S(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{||a|^2 - r^2|})$,

(b) dysk $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a| \leqslant r\}$ na zbiór $\hat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{int} D(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{||a|^2 - r^2|})$ jeżeli $|a| < r$,

(c) dysk $D(a, r)$ na dysk $D(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{||a|^2 - r^2|})$ jeżeli $|a| > r$.

7 (P)**.** Niech $r > 0$ i $|a| = r$. Wykazać, że $z \mapsto 1/z$ przekształca:

(a) okrąg $S(a, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a| = r\}$ na prostą L przechodzącą przez punkt $\frac{1}{2a}$ i prostopadłą do wektora $\bar{a}$, wraz z punktem w nieskończoności,

(b) dysk $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a| < r\}$ na jedną z dwóch półpłaszczyzn o brzegu L.