# FAN*

17 grudnia 2024

**1.** Wykazać, że jeśli pierścienie $A_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $A_2 = \{z \in \mathbb{C}\colon r_2 < |z| < R_2\}$ są bihlomorficzne, to są jednokładne, a jedyne biholomorfizmy między nimi to złożenia sprzężonych inwersji, obrotów i jednokładności o skali $\frac{R_2}{R_1}$. Innymi słowy: jeśli istnieje funkcja biholomorficzna (czyli holomorficzna bijekcja) $f\colon A_1 \to A_2$, to $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ oraz $f(z) = \frac{R_2}{R_1} c z^{\alpha}$, gdzie $|c| = 1$ i $\alpha \in \{-1, 1\}$.

**2.** Załóżmy, że $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$ jest ciągła oraz że $f \in \mathbb{H}(\mathbb{D})$. Wykazać, że $f$ ma dokładnie jeden punkt stały w $\overline{\mathbb{D}}$. Czy teza musi zachodzić, jeśli założymy, że $f$ ma wartości w $\overline{\mathbb{D}}$ a nie w $\mathbb{D}$?

**3.** Wyznaczyć liczbę pierwiastków (licząc z krotnościami) danego wielomianu w otwartym kole jednostkowym:

(a) $z^5 + 4z^2 - 2$; (b) $3z^4 - 5z + 2$; (c) $z^7 - 3z^5 + 9z^4 + z^2 - 2$.

**4.** Niech $a > e$. Wykazać, że równanie $az^n = e^z$ ma w $\mathbb{D}$ dokładnie $n$ parami różnych rozwiązań.

**5.** Ile pierwiastków (licząc z krotnościami) leżących w pierwszej ćwiartce ma wielomian $P(z) = z^9 + 3z^5 + 10z^2 + 2$?

**6.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja całkowita $f$, że ciąg o wyrazie $\frac{f(x_n)}{1+|x_n|}$ dąży do 1 zarówno dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)$ zbieżnego do nieskończoności, jak i dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)$ zbieżnego do minus nieskończoności. Należy podać dowód świadczący o poprawności swojej odpowiedzi.
Co jeśli $\frac{f(x_n)}{1+|x_n|}$ zastąpimy przez $\frac{f(x_n)}{1+\sqrt{|x_n|}}$ i zapytamy o zbieżność do 1 dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)$ zbieżnego do plus nieskończoności?
Co jeśli $\frac{f(x_n)}{1+|x_n|}$ zastąpimy przez $|x_n| f(x_n)$?

**7.** Niech $U \subset \mathbb{D}$ będzie obszarem, którego brzeg ma niepustą część wspólną z okręgiem jednostkowym. Niech dalej $V = \{\overline{z}^{-1}\colon z \in U\}$. Załóżmy, że funkcja $f\colon U \cup (\partial U \cap \partial \mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ jest ciągła oraz że $f \not\equiv 0$, $f \in \mathbb{H}(U)$ i $f(\partial U \cap \partial \mathbb{D}) \subset \partial \mathbb{D}$. Określmy funkcję $F\colon U \cup V \cup (\partial U \cap \partial V) \to \mathbb{C}$ wzorem

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } z \in \overline{\mathbb{D}}, \\ \left(\overline{f(\overline{z}^{-1})}\right)^{-1} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykazać, że $F$ jest meromorficzna na $U \cup V \cup (\partial U \cap \partial V)$ oraz holomroficzna na $U \cup \{\overline{z}^{-1}\colon z \in U, f(z) \neq 0\} \cup (\partial U \cap \partial V)$.

**8.** Załóżmy, że $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą na $\overline{\mathbb{D}}$, holomroficzną na $\mathbb{D}$ oraz że $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$. Udowodnić, że:

- $f$ jest funkcją wymierną;
- $f$ ma miejsce zerowe w $\mathbb{D}$ lub $f$ jest stała;
- jeśli $f$ nie zeruje się na $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, to jest wielomianem.

**9.** Zrobić Zadanie 1, używając zasady symetrii.