FAN*

10 grudnia 2024

1. Wykazać, że funkcja $f(z) = \sqrt{\frac{z}{1-z}}\,\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{z}{1-z}}$ jest holomorficzna w pewnym otoczeniu 0. Niech $r > 0$ oznacza maksymalny promień, dla którego f jest holomorficzna na $D(0,r)$. Wykazać, że $2z(1-z)f'(z) = f(z) + z$ na $D(0,r)$ oraz że $f(0) = 0$. Wyznaczyć szereg Taylora funkcji f wokół 0 i obliczyć r.

2. Wyznaczyć szereg Laurenta funkcji $e^{z+\frac{1}{z}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ w nakłutym otoczeniu zera. Wykazać, że

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos t}\cos(kt)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{n!(n+k)!} \qquad \text{dla wszystkich } k \in \mathbb{N}.$$

3. Wykazać, że jeśli pierścienie $A_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $A_2 = \{z \in \mathbb{C}\colon r_2 < |z| < R_2\}$ są bihlomorficzne, to są jednokładne, a jedyne biholomorfizmy między nimi to złożenia sprzężonych inwersji, obrotów i jednokładności o skali $\frac{R_2}{R_1}$. Innymi słowy: jeśli istnieje funkcja biholomorficzna (czyli holomorficzna bijekcja) $f\colon A_1 \to A_2$, to $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ oraz $f(z) = \frac{R_2}{R_1}cz^\alpha$, gdzie $|c| = 1$ i $\alpha \in \{-1, 1\}$.

4. Załóżmy, że $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$ jest ciągła oraz że $f \in \mathbb{H}(\mathbb{D})$. Wykazać, że f ma dokładnie jeden punkt stały w $\overline{\mathbb{D}}$. Czy teza musi zachodzić, jeśli założymy, że f ma wartości w $\overline{\mathbb{D}}$ a nie w $\mathbb{D}$?

5. Wyznaczyć liczbę pierwiastków (licząc z krotnościami) danego wielomianu w otwartym kole jednostkowym:

(a) $z^5 + 4z^2 - 2$; (b) $3z^4 - 5z + 2$; (c) $z^7 - 3z^5 + 9z^4 + z^2 - 2$.

6. Niech $a > e$. Wykazać, że równanie $az^n = e^z$ ma w $\mathbb{D}$ dokładnie n parami różnych rozwiązań.

7. Ile pierwiastków (licząc z krotnościami) leżących w pierwszej ćwiartce ma wielomian $P(z) = z^9 + 3z^5 + 10z^2 + 2$?

Pisemne zadanie domowe za dodatkowe 2 punkty. Termin oddania: 21 stycznia, 8.30.

Dany jest szereg potęgowy $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ zadający funkcję f, która jest ciągła na $\overline{\mathbb{D}}$ i holomorficzna w $\mathbb{D}$. Załóżmy, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt < \left(1 + \frac{1}{4}|a_1|^2\right)^2.$$

Wykazać, że f ma pierwiastek w $\mathbb{D}$.