FAN*

3 grudnia 2024

1. (a) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \to \mathbb{C}$, która w każdym z punktów $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ma biegun?

(b) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \to \mathbb{C}$, która w każdym z punktów $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ma osobliwość istotną?

(c) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \ldots\} \to \mathbb{C}$, która dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ma biegun rzędu n w punkcie $z = n$?

2. Obliczyć residua funkcji f w każdym z jej (skończonych) punktów osobliwych dla:

$$\text{(a) } f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}; \qquad \text{(b) } f(z) = \sin z \cos \frac{1}{z}.$$

Dla funkcji f holomorficznej w $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > R_0\}$ wartość całki

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} f(z)\, dz$$

nie zależy od $R > R_0$. Wartość tę nazywamy residuum funkcji f w nieskończoności i oznaczamy ją $\operatorname{res}(f, \infty)$.

3 (Fakt 2)**.** Załóżmy, że zbiór $A \subset \mathbb{C}$ jest skończony, zaś funkcja f jest holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus A$. Niech $B = A \cup \{\infty\}$. Wykazać, że

$$\sum_{b \in B} \operatorname{res}(b, f) = 0.$$

4 (Fakt 1)**.** Wykazać, że jeśli f jest holomorficzna w $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > R_0\}$, to

$$-\operatorname{res}(\infty, f) = \operatorname{res}\Big(0, f(z^{-1}) z^{-2}\Big).$$

5. Niech $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ w $\{z \colon |z| > R_0\}$. Udowodnić, że $\operatorname{res}(\infty, f) = -c_{-1}$.

6. Obliczyć

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)} \qquad \text{oraz} \qquad \int_{C(0,2)} \frac{z^{19}}{z^{10} - 2}\, dz.$$

7. Dana jest funkcja meromorficzna $f \colon \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ o skończonej liczbie biegunów $a_1, \ldots, a_m$, przy czym $a_1, \ldots, a_m \notin \mathbb{Z}$. Wykazać, że jeśli $\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$, to

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\Big(a_k, \pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)\Big).$$