FAN*

26 listopada 2024

1. Załóżmy, że funkcja $f\colon \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \geqslant 1\}$ jest ciągła w $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \geqslant 1\}$, holomorficzna w $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| > 1\}$ oraz ma (skończoną) granicę w nieskończoności. Udowodnić, że

$$\sup_{\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\geqslant 1\}} |f(z)| = \sup_{\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}} |f(z)|.$$

2 (Do pomyślenia na następne ćwiczenia)**.**

(a) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \to \mathbb{C}$, która w każdym z punktów $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ma biegun?

(b) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \to \mathbb{C}$, która w każdym z punktów $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ma osobliwość istotną?

(c) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \ldots\} \to \mathbb{C}$, która dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ma biegun rzędu n w punkcie $z = n$?

3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $f_n(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(n)} z^k$ w pierścieniu $A = \{z \in \mathbb{C}\colon r < |z| < R\}$. Wykazać, że jeśli $f_n \to f$ niemal jednostajnie na A, to $\lim_{n\to\infty} c_k^{(n)} =: c_k$ istnieje dla każdego k oraz zachodzi $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ na A.

4 (P)**.** Niech $0 \leqslant r_1 < R_1 \leqslant \infty$, $0 \leqslant r_2 < R_2 \leqslant \infty$, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C}\colon r_2 < |z| < R_2\}$. Wykazać, że jeśli dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ szereg $\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l c_{k-l} =: a_k$ jest zbieżny, to $f(z)g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C}\colon \max\{r_1, r_2\} < |z| < \min\{R_1, R_2\}\}$.
Czy to prawda, że (przy warunkach z pierwszego zdania) szereg $\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l c_{k-l}$ musi być zbieżny dla każdego $k \in \mathbb{Z}$?

5. Wyznaczyć wszystkie szeregi Laurenta wokół 0 funkcji $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$. Wyznaczyć wszystkie szeregi Laurenta wokół 1 funkcji f.