FAN*

19 listopada 2024

1 (Twierdzenie Hadamarda o trzech okręgach – wersja słabsza dla funkcji bez zer)**.** Dana jest funkcja holomorficzna $f\colon A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gdzie A jest pierścieniem $\{z \in \mathbb{C}\colon R_1 < |z| < R_2\}$. Niech $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ dla $r \in (R_1, R_2)$. Wykazać, że funkcja $r \mapsto \ln(M(e^r))$ jest wypukła na $(\ln R_1, \ln R_2)$.
Uwaga: w pracy domowej pojawi się podobne zadanie (dodatkowe), z pominiętym założeniem o tym, że f się nie zeruje.

2. Załóżmy, że $f\colon U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna na ograniczonym obszarze U i ciągła w $\overline{U}$. Wykazać, że jeśli $|f|$ jest stała na ∂U, to f jest stała lub ma zero w U.

Twierdzenie 1 (Lemat Schwarza)**.** Jeśli $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ jest holomorficzna i $f(0) = 0$, to

$$|f(z)| \leqslant |z| \qquad \text{dla wszystkich } z \in \mathbb{D}.$$

Wobec tego, jeśli $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna, $g(0) = 0$ i $|g| \leqslant M$ na $\mathbb{D}$, to

$$|g(z)| \leqslant M|z| \qquad \text{dla wszystkich } z \in \mathbb{D}.$$

Twierdzenie 2 (Lemat Schwarza-Picka)**.** Jeśli $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ jest holomorficzna, to

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leqslant \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2}\right| \qquad \text{dla wszystkich } z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

Wobec tego, jeśli $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna, $g(z_1) = 0$ i $|g| \leqslant M$ na $\mathbb{D}$, to

$$|g(z)| \leqslant M\left|\frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}z}\right| \qquad \text{dla wszystkich } z \in \mathbb{D}.$$

3. Załóżmy, że $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna. Niech $z_1, \ldots, z_n$ będą pewnymi zerami f (licząc z krotnościami). Załóżmy, że $|f| \leqslant M$ na $\mathbb{D}$. Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{D}$ zachodzi

$$|f(z)| \leqslant M\left|\frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \cdot \ldots \cdot \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}\right|.$$

4. Wykazać, że nie istnieje funkcja całkowita f spełniająca

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^3}$$

dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

5. Dane są $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz funkcja f holomorficzna w $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Wykazać równoważność poniższych warunków:

(i) istnieją $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ takie, że $c_m \neq 0$ oraz $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ ma osobliwość usuwalną w z_0,

(ii) $\lim_{z \to z_0} |f(z)(z - z_0)^{m-1}| = \infty$ i istnieje (skończona) granica $f(z)(z - z_0)^m$ przy z zbiegającym do z_0.

6. Wyznaczyć wszystkie (izolowane) punkty osobliwe funkcji $f(z) = \frac{e^z(z+2)}{(z^2+1)^3(z^2-4)}$. Dla każdego z nich określić, jakiego jest typu (osobliwość pozorna/biegun/osobliwość istotna).