FAN*

12 listopada 2024

1. Obliczyć:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx \quad \text{and} \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx,$$

$$\text{(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,dx, \qquad \text{(d)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t}\,dt.$$

2. Dana jest funkcja całkowita f. Obliczyć

$$\int_{S(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz,$$

gdzie $a, b \in D(0,R)$ są różne.
Wywnioskować twierdzenie Liouville'a: ograniczona funkcja całkowita jest stała.

3. Załóżmy, że $a, b > 0$ oraz f jest taką funkcją całkowitą, że $f(z+a) = f(z)$ oraz $f(z+bi) = f(z)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Wykazać, że f jest stała.

4. Załóżmy, że $f\colon R \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna w $R = \{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 2\}$ i ciągła w $\overline{R}$, a także że zachodzą nierówności:

$$|f(z)| \leqslant 1 \quad \text{dla } |z| = 1 \qquad \text{oraz} \qquad |f(z)| \leqslant 4 \quad \text{dla } |z| = 2.$$

Wykazać, że $|f(z)| \leqslant |z|^2$ na R.

5. Dana jest funkcja holomorficzna $f : \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\} \to \mathbb{C}$. Dla $0 \leqslant r < R$ niech $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Wykazać, że funkcja M jest ściśle rosnąca na $[0, R)$ lub f jest stała.