FAN*

5 listopada 2024

1. Niech $U = \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = V$ oraz $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ dla wszystkich $(x,y) \in V$.

(a) Wykazać, że u jest harmoniczna.
(b) Załóżmy, że $v : V \to \mathbb{R}$ jest taka, że $u + iv$ jest holomorficzna na U. Wykazać, że $\frac{\partial}{\partial t}(v(\sin t, \cos t)) = -2$.
(c) Wykazać, że nie istnieje taka funkcja $v : V \to \mathbb{R}$, że funkcja $u + iv$ jest holomorficzna na U.

Definicja 1. Dla parametryzacji $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ kawałkami klasy C^1 krzywej γ definiujemy długość krzywej γ wzorem

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

2. Dana jest krzywa γ długości L której obraz γ^* zawarty jest w obszarze U oraz funkcja $f \colon U \to \mathbb{C}$ spełniająca $|f| \leqslant M$ na γ^*. Wykazać, że

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leqslant ML.$$

3. Załóżmy, że f jest funkcją całkowitą (tj. f jest holomorficzna na $\mathbb{C}$). Czy to prawda, że dla każdego $z, w \in \mathbb{C}$ istnieje $\xi \in \mathbb{C}$, takie że $f(z) - f(w) = f'(\xi)(z - w)$?

4. Załóżmy, że $f \in H(\mathbb{D})$ (tj. f jest holomorficzna na $\mathbb{D}$). Wykazać, że dla wszystkich $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$|f(z) - f(w)| \leqslant |z - w| \sup_{\xi \in [z,w]} |f'(\xi)|.$$

Twierdzenie 1 (Wzór całkowy Cauchy'ego)**.** Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna oraz że D jest takim obszarem jednospójnym, że $\overline{D} \subset U$ i $C = \partial D$ jest krzywą Jordana z dodatnią orientacją. Wtedy dla wszystkich $z_0 \in D$ zachodzi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Co więcej, jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $f^{(n)}$ istnieje w U i dla każdego $z_0 \in D$ zachodzi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

5. Obliczyć:

$$\text{(a)} \int_{\{|z|=1\}} \frac{e^z}{z}\,dz, \qquad \text{(b)} \int_{\{|z|=1\}} \frac{\cos z}{z^2}\,dz, \qquad \text{(c)} \int_{\{|z|=3\}} \frac{\sin z}{z^2-2z}\,dz.$$

6. Obliczyć:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx,$$

$$\text{(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,dx, \qquad \text{(d)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t}\,dt.$$