FAN*

29 października 2024

1. Niech $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Wykazać, że f przekształca bijektywnie górne (otwarte) półkole $\mathbb{D} \cap \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ na dolną półpłaszczyznę $\mathbb{H}$.

2. Podać przykład punktów $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, takich że $z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ oraz $\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$.

3. Załóżmy, że funkcja $f\colon U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest holomorficzna na obszarze jednospójnym U. Ustalmy $a \in D$ oraz $A \in \mathbb{C}$, takie że $e^A = f(a)$. Wykazać, że całka

$$I(z) = \int_a^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi + A$$

nie zależy od drogi łączącej a z $z \in U$ zawartej w U. Wykazać, że I jest holomorficzną gałęzią logarytmu funkcji f w obszarze U.

4. Wykazać, że nie istnieje gałąź logarytmu na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, to znaczy nie istnieje funkcja holomorficzna $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ spełniająca $e^{f(z)} = z$ dla wszystkich punktów $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Niech U będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $g : U \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy $C^2(U)$ spełniającą $\Delta g \geqslant 0$. Wykazać, że

$$\frac{1}{|\partial B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0,r)} g(u)\, d\sigma_{\partial B(x_0,r)}(u) \geqslant g(x_0)$$

dla każdego $x_0 \in U$ i $r > 0$ takich że $\overline{B(x_0, r)} \subset U$.
Co jeśli zamiast uśredniać po sferach będziemy uśredniać po kulach o środku w x_0?

6. Załóżmy, że U jest obszarem w $\mathbb{R}^n$, a funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^2(U)$ i spełnia $\Delta f \geqslant 0$. Wykazać, że jeśli dla pewnego $z_0 \in U$ nierówność $f(z) \leqslant f(z_0)$ zachodzi dla każdego $z \in U$, to f jest stała na U.

7. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, które są stałe na okręgach o środku w zerze. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, które są stałe na okręgach o środku w zerze.