FAN*

22 października 2024

1. Uzasadnić, że dwustosunek $(z_1; z_2; z_3; z_4)$ jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy gdy z_1, z_2, z_3, z_4 leżą na jednym okręgu uogólnionym.

2. Wyznaczyć homografię f, dla której $f(\infty) = 1$, $f(0) = -1$ i $f(i) = 0$. Wykazać, że f przekształca górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}$ na otwarty dysk jednostkowy $\mathbb{D}$.

3. Niech $f(z) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$. Wykazać, że f przekształca bijektywnie górne (otwarte) półkole $\mathbb{D} \cap \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ na dolną półpłaszczyznę $\mathbb{H}$.

4. Wyznaczyć wszystkie punkty z, w których dana funkcja ma pochodną zespoloną:

$$\text{(a) } f(z) = |z|, \qquad \text{(b) } f(z) = \overline{z}, \qquad \text{(c) } f(z) = \frac{1}{z}.$$

Definicja 1. Dla formy $\omega = f_1 dx_1 + \ldots f_n dx_n$ i zorientowanej jednowymiarowej rozmaitości (czyli krzywej) M klasy C^1 w $\mathbb{R}^n$ z parametryzacją $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [a, b] \to M$ zgodną z orientacją definiujemy

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\, dt.$$

5. Wykazać, że definicja $\int_M \omega$ nie zależy od γ. (Dlatego często będziemy używać tego samego oznaczenia γ na krzywą M i jej parametryzację γ.)

6. Załóżmy, że $U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ jest obszarem, M – krzywą zorientowaną klasy C^1 w U oraz $f = u + iv$ dla pewnych $u, v\colon U \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że dla każdej dodatnio zorientowanej parametryzacji $\gamma : [a, b] \to M$ krzywej M zachodzi

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_M (udx - vdy) + i \int_M (vdx + udy).$$

7. Obliczyć całki $\int_{[0,\pi - i\pi]} e^{\overline{z}} dz$, $\int_\gamma |z|^n dz$, gdzie $\gamma = \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ z orientacją od 1 do -1 oraz całkę $\int_\eta |z|^n dz$, gdzie $\eta = \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ z orientacją od -1 do 1. Czy $z \mapsto |z|^n$ jest holomorficzna w dysku jednostkowym $\mathbb{D}$?