FAN*

15 października 2024

1. Uzasadnić, że każda homografia jest złożeniem przesunięć $z \mapsto z + a$, jednokładności $z \mapsto az$ i inwersji (sprzężonych) $z \mapsto z^{-1}$.

2. Uzasadnić, że każda homografia jest bijekcją $\hat{\mathbb{C}}$.

3. Uzasadnić, że homografia przekształca okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

4. Wykazać, że homografie zachowujące dysk jednostkowy $\mathbb{D}$ są postaci

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad \text{gdzie } \theta = \arg(f'(0)) \text{ i } a = f^{-1}(0).$$

Uzasadnić, że tę rodzinę przekształceń można równoważnie zapisać w postaci $f(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$, gdzie $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

5. Wykazać, że homografie zachowują dwustosunek $(z_1; z_2; z_3; z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$.

6. Załóżmy, że z_1, z_2, z_3 są parami różne oraz że w_1, w_2, w_3 są parami różne. Wykazać, że homografia $f(z)$ przekształcająca z_1, z_2, z_3 na w_1, w_2, w_3 (odpowiednio) zadana jest równaniem

$$(w_1; w_2; w_3; f(z)) = (z_1; z_2; z_3; z).$$