FAN*

8 października 2024

1. Wykazać, że $x, y, z \in \mathbb{C}$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego wtedy i tylko wtedy, gdy
$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

2. Udowodnić, że pierwiastki wielomianu zespolonego P stopnia co najmniej dwa oraz pierwiastki wielomianu P' mają ten sam środek ciężkości (czyli średnią arytmetyczną).

3. Czy istnieje wielomian o współczynnikach rzeczywistych $P(x, y)$, którego obrazem jest $(0, \infty)$?

Od teraz, gdy mówimy o wielomianie, mamy na myśli wielomian z $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$ o współczynnikach zespolonych.

4. Załóżmy, że P jest wielomianem i niech $f(z) = \bar{z}$. Wykazać, że
$$\int_0^{2\pi} |f(e^{it}) - P(e^{it})|^2 \, dt \geqslant 2\pi.$$
Uzasadnić, że f nie można przybliżać jednostajnie wielomianami na okręgu jednostkowym $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.

5. Dane są liczby dodatnie $c_1, \ldots, c_n$ spełniające $c_1 + \ldots + c_n \leqslant 1$. Wykazać, że wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ są zawarte w dysku $\{|z| \leqslant R\}$, gdzie
$$R = \max\left(\frac{|a_1|}{c_1}, \sqrt{\frac{|a_2|}{c_2}}, \ldots \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{c_n}}\right).$$
W szczególności są one zawarte w dysku $\{|z| \leqslant \widetilde{R}\}$, gdzie $\widetilde{R} = 2\max_{k=1,\ldots,n} \sqrt[k]{|a_k|}$.

6. Załóżmy że $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$. Udowodnić, że wielomian $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ nie ma pierwiastków w dysku jednostkowym $\mathbb{D} = \{|z| \leqslant 1\}$.

7. Dany jest wielomian zespolony $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Wykazać, że
$$\max_{|z|=1} |P(z)| \geqslant |a_0| + |a_n|.$$

8. Niech $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć
$$\min_{z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{T}} \max_{z \in \mathbb{T}} \prod_{k=1}^{n} |z - z_k|.$$

9. Dane są $a \in \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$ oraz $B(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Wykazać, że:

(a) $(|z|-1)(|a|-1) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|B(z)| < 1$,
(b) $(|z|-1)(|a|-1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|B(z)| = 1$,
(c) $(|z|-1)(|a|-1) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|B(z)| > 1$.

10. Dany jest wielomian zespolony P. Wykazać, że istnieje wielomian zespolony Q, taki że $|P(z)| = |Q(z)|$ dla każdego $|z| = 1$ oraz Q nie ma pierwiastków w $\{|z| < 1\}$.

11. Dane są wielomian P stopnia n, oraz $a \neq b$ takie, że $P(a) \neq P(b)$. Niech $C_{a,b}$ będzie zbiorem wszystkich liczb zespolonych, z których odcinek $[a, b]$ widać pod kątem co najmniej π/n (brzeg tego zbioru składa się z dwóch łuków). Wykazać, że $[P(a), P(b)] \subseteq P(C_{a,b})$.