

FAN*

XI seria zadań domowych,
termin: 13 stycznia, godzina 10.15

Zadania 1-4 stanowią brakujące składniki dowodu twierdzenia o liczbach pierwszych pokazywanego na wykładzie.

1. Uzasadnić, że funkcja zadana całką

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

zadaje funkcję holomorficzną na $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Wykazać, że dla $s \in \{\operatorname{Re} z > 0\}$ zachodzi tożsamość $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Wywnioskować stąd, że $\Gamma(n+1) = n!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Uzasadnić, że znany z AM wzór

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \text{dla } s \in (0, 1)$$

zachodzi dla każdego $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

3. Załóżmy, że $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją niemalejącą, że całka $\int_1^\infty \frac{f(t)-t}{t^2} dt$ jest zbieżna. Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

4. Wykazać, że jeśli $\operatorname{Re} s > 1$, to

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

gdzie $\mathcal{P}$ oznacza zbiór (dodatnich) liczb pierwszych.

5. Wyznaczyć rozwinięcie w iloczyn nieskończony na $\mathbb{C}$ funkcji $\sin z - z \cos z$.

6. Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$\frac{\sin \pi z}{z(1-z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z - z^2}{n^2 + n} \right).$$

7. Dana jest $\alpha > 1$. Wykazać, że funkcja

$$F_\alpha(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|^\alpha} e^{zt} dt$$

jest funkcją całkowitą rzędu $\frac{\alpha}{\alpha-1}$.