

FAN*

9 grudnia 2025

1. Załóżmy, że $f: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{D}$ jest ciągła oraz że $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Wykazać, że f ma dokładnie jeden punkt stały w $\overline{\mathbb{D}}$. Czy teza musi zachodzić, jeśli założymy, że f ma wartości w $\overline{\mathbb{D}}$ a nie w $\mathbb{D}$?

2. Wyznaczyć liczbę pierwiastków (licząc z krotnościami) danego wielomianu w otwartym kole jednostkowym:

$$(a) z^5 + 4z^2 - 2; \quad (b) 3z^4 - 5z + 2; \quad (c) z^7 - 3z^5 + 9z^4 + z^2 - 2.$$

3. Niech $a > e$. Wykazać, że równanie $az^n = e^z$ ma w $\mathbb{D}$ dokładnie n parami różnych rozwiązań.

4. Ile pierwiastków (licząc z krotnościami) leżących w pierwszej ćwiartce ma wielomian $P(z) = z^9 + 3z^5 + 10z^2 + 2$?

5. Niech $U \subset \mathbb{D}$ będzie obszarem, którego brzeg ma niepustą część wspólną z okręgiem jednostkowym. Niech dalej $V = \{\bar{z}^{-1}: z \in U\}$. Załóżmy, że funkcja $f: U \cup (\partial U \cap \partial \mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ jest ciągła oraz że $f \neq 0$, $f \in \mathcal{H}(U)$ i $f(\partial U \cap \partial \mathbb{D}) \subset \partial \mathbb{D}$. Określmy funkcję $F: U \cup V \cup (\partial U \cap \partial V) \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } z \in \overline{\mathbb{D}}, \\ \left(\overline{f(\bar{z}^{-1})}\right)^{-1} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykazać, że F jest meromorficzna na $U \cup V \cup (\partial U \cap \partial V)$ oraz holomorficzna na $U \cup \{\bar{z}^{-1}: z \in U, f(z) \neq 0\} \cup (\partial U \cap \partial V)$.

6. Załóżmy, że $f: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą na $\overline{\mathbb{D}}$, holomorficzną na $\mathbb{D}$ oraz że $f(\partial \mathbb{D}) \subset \partial \mathbb{D}$. Udowodnić, że:

- f jest funkcją wymierną;
- f ma miejsce zerowe w $\mathbb{D}$ lub f jest stała;
- jeśli f nie zeruje się na $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, to jest wielomianem.

7. Zrobić Zadanie o biholomorficzności pierścieni, używając zasady symetrii:

Wykazać, że jeśli pierścienie $A_1 = \{z \in \mathbb{C}: r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $A_2 = \{z \in \mathbb{C}: r_2 < |z| < R_2\}$ są biholomorficzne, to są jednokładne, a jedyne biholomorfizmy między nimi to złożenia sprzężonych inwersji, obrotów i jednokładności o skali $\frac{R_2}{R_1}$. Innymi słowy: jeśli istnieje funkcja biholomorficzna (czyli holomorficzna bijekcja) $f: A_1 \rightarrow A_2$, to $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ oraz $f(z) = \frac{R_2}{R_1} cz^\alpha$, gdzie $|c| = 1$ i $\alpha \in \{-1, 1\}$.