AM I.2

XI seria zadań

do oddania na początku ćwiczeń 14 czerwca

1 (Zadanie warte $\frac{3}{4}$ punktu)**.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n+2024} \frac{k^3}{n^4} e^{k^2/n^2}.$$

2 (Zadanie warte $\frac{3}{4}$ punktu)**.** Wykazać podwójną nierówność

$$\frac{\pi n^2}{4} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} \leqslant \frac{\pi n^2 + 4n}{4}.$$

3. Wyznaczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin^n(x)}{1 + \sin^n(x)} dx.$$

4. Załóżmy, że funkcje $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna oraz że zachodzi równość $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = 1$. Wykazać, że istnieje taki przedział $[c, d] \subset [a, b]$, że

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

5 (Oba podpunkty warte po $\frac{3}{4}$ punktu)**.**
(a) W zależności od parametrów $a, b, c > 0$ zbadać zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x^b + x^c}.$$

(b) W zależności od parametrów $a \in \mathbb{R}$ oraz $b > 0$ zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całki

$$\int_0^\infty \frac{x^a \sin(x)}{1 + x^b}.$$