

Analiza I.1

X seria zadań domowych (na środę 7 stycznia, godz. 10.15)

1 (Każdy podpunkt wart jest tyle, co $\frac{1}{3}$ zadania). Obliczyć granice lub wykazać, że dana funkcja nie ma granicy (lub granicy jednostronnej) we wskazanym punkcie:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x^2}} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - 3^{x^2}}{\sin(\pi x)} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x + x^2})}{\operatorname{tg}(\sqrt{x})} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin(\ln(x + 1)) - \sin(\ln x) \right) & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1} \\ \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{11} - 11x + 10}{(1 - x)^2} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - e^{x-e}}{\sin\left(\frac{\pi}{e}x\right)} & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2 - 1}}. \end{array}$$

ZADANIA ĆWICZEBNE – NIE NA PUNKTY

2. Załóżmy, że $\lim_{x \rightarrow 0} f([x^{-1}]^{-1}) = 0$. Czy z tego wynika, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$?
3. Załóżmy, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(2x) = 0$. Czy z tego wynika, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ istnieje?
4. Załóżmy, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{a}{n}\right) = 0$. Czy z tego wynika, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$?
5. Podać przykład funkcji $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dla której istnieją granice $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, k)$ (dla każdego $k \in \mathbb{N}$) i $\lim_{k \rightarrow \infty} f(n, k)$ (dla każdego $n \in \mathbb{N}$), a także granice tych granic: $\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n, k)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f(n, k)$, ale $\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n, k) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f(n, k)$.
6. Załóżmy, że $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona na odcinku $[0, a]$ dla każdego $a > 0$ oraz że $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x + 1) - f(x)) = g$. Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = g$.
7. Obliczyć granice:

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 1} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1 + 5x)} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + x} - 1} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(\pi x)} & \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{(\operatorname{tg} x)^2}} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^5(x^2)}{\ln(1 + x^4)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{e^{\sin x} - 1} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(x)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x^2) - 1}{\ln(2x^4 + 1)} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} & \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{4 + 5x} - 7}{x - 9} & \lim_{x \rightarrow -32} \frac{\sqrt{17 - x} - 7}{2 + \sqrt[5]{x}} & \lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1}}{x^{-1}} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{\sin(4x)} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{19 - x} - 2\sqrt[4]{13 + x}}{\sqrt[3]{11 - x} + 1 - x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\sqrt[3]{x}} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\sqrt{x}} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\sin x} & \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(\sqrt{x^2 + 1} - x) & \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x & \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right).
\end{array}$$

8. Obliczyć granice:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}, \quad a, b > 0,$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right), \quad m, n \in \mathbb{N},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{\sin(\pi x)}, \quad n \in \mathbb{N},$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}, \quad m, n \in \mathbb{N},$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} - n}{x - 1},$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}, \quad a, b > 0.$