

1. Udowodnij, że następujące języki nie są regularne

- (a) $\{a^n b^m c^{n+m} : n, m \in \mathbb{N}\}$
 (b) $\{a^m b^n : m \geq n\}$

2. Załóżmy, że dla pewnego języka L , język

$$\text{Cycle}(L) = \{uw : wu \in L\}$$

jest regularny. Czy wówczas L też musiał być regularny?

Szkic rozwiązania. Nie. Rozważmy $L = \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Gdyby L był regularny to z lematu o pompowaniu wywnioskujemy, że dla pewnego N , skoro $a^N b a^N \in L$, to $a^N b a^N = xyz$, gdzie $|y| \geq 1$, $|xy| \leq N$ oraz $\forall k \in \mathbb{N}$ $xy^k z \in L$. Wówczas jednak xy składa się z samych liter a , więc $xy^2 z$ nie może należeć do języka.

Z drugiej strony $\text{Cycle}(L) = (aa)^* b (aa)^* + a(aa)^* b a(aa)^*$ jest regularny. $\square$

3. Niech L będzie językiem regularnym nad Σ . Które z poniższych języków są też wówczas na pewno regularne?

$$\begin{aligned} 2L &= \{wu : |w| = |u|, w \in L, u \in \Sigma^*\} \\ \text{Square}(L) &= \{ww : w \in L\} \\ \text{Power}(L) &= \{w^n : n \in \mathbb{N}, w \in L\} \\ L^L &= \{w^{|w|} : w \in L\} \end{aligned}$$

Szkic rozwiązania. Weźmy $L = a^* b$. Żaden z powyższych języków nie jest wówczas regularny. Dla przykładu, $2L = \{a^n b(a+b)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Aby udowodnić, że nie jest on regularny można skorzystać z lematu o pompowaniu np. dla słowa $a^N b a^{N+1}$ dla dostatecznie dużego N . $\square$

4. Podaj przykład języka L , który nie jest regularny, ale $L \cdot L$ jest regularny.

Szkic rozwiązania. Niech $L = \{w \in \{a, b\}^* : \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$. Gdyby L był regularny, to wówczas dopełnienie L^c tego języka również było regularne. Język $L^c \cap a^* b^* = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ również byłby regularny, jednak z wykładu (proste skorzystanie z lematu o pompowaniu) wiemy że tak nie jest. Stąd L nie jest regularny.

Z drugiej strony $L \cdot L$ jest dopełnieniem języka regularnego $K = a(ba)^* + b(ab)^* + \varepsilon$. Istotnie, łatwo sprawdzić, że żadne ze słów z K nie jest w $L \cdot L$. Z drugiej strony, dowolne słowo z dopełnienia K jest jednej z postaci $(ab)^+$, $(ba)^+$ lub $(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$. Łatwo sprawdzić, że słowa jednej z dwóch pierwszych podanych postaci są w $L \cdot L$. Słowo postaci $(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$ można zapisać jako $waau$ lub $wbbu$ dla pewnych słów w, u . Wówczas $w, aau \in L$ lub $wa, au \in L$ lub $waa, u \in L$ (analogicznie dla $wbbu$). $\square$

5. (20) Czy następujący język jest regularny?

$\{w \in \{a, b\}^* : \#_a(u) > 2025\#_b(u) \text{ dla każdego niepustego prefiksu } u \text{ słowa } w\}$