

1. Narysuj automat niedeterministyczny (a potem deterministyczny) rozpoznający dany język nad alfabetem $\{a, b\}$:

(a) $a^* + b^*$

(b) $(a + ab)^*$

(c) b^*ab^*

2. (24) *Odwrocenie* słowa $w \in \Sigma^*$, oznaczane jako w^R można zdefiniować rekurencyjnie: $\varepsilon^R = \varepsilon$, $(u\sigma)^R = \sigma u^R$ dla $u \in \Sigma^*$, $\sigma \in \Sigma$. Udowodnij, że język L jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy język $L^R = \{w^R : w \in L\}$ jest regularny.

3. (23) Udowodnij, że dla dowolnego języka regularnego $L \subseteq \Sigma^*$ i dowolnego (sic!) zbioru $X \subseteq \Sigma^*$ następujące języki, zwane odpowiednio *lewostronnym* i *prawostronnym ilorazem* L , są regularne.

$$X^{-1}L = \{w : \exists v \in X. vw \in L\} \quad LX^{-1} = \{w : \exists u \in X. wu \in L\}$$

4. (25) Dla automatu $\mathcal{A}$ rozpoznającego język L skonstruuj automat $\mathcal{B}$ rozpoznający język

$$\text{Cycle}(L) = \{uw : wu \in L\}.$$

5. (29/30/31) Niech L będzie językiem regularnym. Udowodnij, że następujące języki są regularne:

$$\frac{1}{2}L = \{w : \exists u. |w| = |u|, wu \in L\}$$

$$\sqrt{L} = \{w : ww \in L\}$$

$$\text{Root}(L) = \{w : \exists n \in \mathbb{N}. w^n \in L\}$$

$$\sqrt[l]{L} = \{w : w^{|w|} \in L\}$$