

1. Znajdź liczbę wszystkich języków nad alfabetem $\{a, b\}$ o następujących własnościach:

- (a) Wszystkie słowa są długości co najwyżej n .
- (b) Wszystkie słowa są długości $n \geq 2$ i każde słowo zawiera infiks aa .
- (c) Słowa nie zawierają symbolu b .
- (d) Język jest skończony.

W pierwszych dwóch podpunktach oczekiwany jest wzór w zależności od n . W trzecim i czwartym podpunkcie należy stwierdzić czy jest ich przeliczalnie czy nieprzeliczalnie wiele.

2. Udowodnij, że poniższe definicje pewnego języka L nad alfabetem $\{(\cdot, \cdot)\}$ są równoważne:

- (a) L jest najmniejszym względem inkluzji językiem o następujących własnościach: słowo puste należy do L oraz jeśli $w, v \in L$ to również $wv \in L$ i $(w) \in L$.
- (b) L jest zbiorem słów w o następującej własności: liczby wystąpień $($ oraz $)$ w słowie w są takie same oraz w dowolnym prefiksie w liczba wystąpień $($ jest większa lub równa liczbie wystąpień $)$.

3. Słowo $w \in \Sigma^*$ nazwiemy *pierwotnym* jeśli nie istnieje słowo v takie, że $w = v^n$ dla pewnego $n > 1$.

- (a) Udowodnij, że dla dowolnego niepustego słowa w istnieje dokładnie jedno pierwotne słowo v , że $w = v^n$ dla pewnego $n \geq 1$. Liczbę n nazwiemy *wykładnikiem* słowa w .
- (b) Dla dowolnych słów u, w słowa uw i wu nazwiemy *sprzężonymi*. Udowodnij, że relacja bycia sprzężeniem jest relacją równoważności i wszystkie słowa w obrębie jednej klasy równoważności mają ten sam wykładnik. Ile elementów jest w klasie równoważności słowa o długości m i wykładniku n ?

4. Zbiór $C \subseteq \Sigma^*$ nazywamy *kodem* jeśli każde słowo $w \in \Sigma^*$ można zdekodować, tzn. sfaktoryzować na co najwyżej jeden sposób jako $w = w_1 w_2 \dots w_k$ gdzie $w_1, w_2, \dots, w_k \in C$.

- (a) Niech $\Sigma = \{a, b\}$. Udowodnij, że $\{aa, baa, ba\}$ jest kodem, zaś $\{a, ab, ba\}$ nie jest.
- (b) Dla skończonego zbioru A , który nie jest kodem, podaj górne ograniczenie na najkrótsze słowo, które ma dwie różne faktoryzacje.
- (c) Udowodnij, że $\{u, v\}$ jest kodem wtedy i tylko wtedy, gdy $uv \neq vu$.

5. Reprezentujemy liczby binarnie jako słowa nad alfabetem $\{0, 1\}$. Zapisz za pomocą wyrażenia regularnego:

- (a) Zbiór liczb parzystych.
- (b) Zbiór liczb o parzystej liczbie cyfr.
- (c) Zbiór liczb podzielnych przez 3.