

Porządki częściowe

Relację binarną $\preceq$ zadaną na zbiorze X nazywamy **porządkiem częściowym**, jeśli spełnia następujące aksjomaty:

- (a) (zwrotność) $x \preceq x$ dla każdego $x \in X$;
- (b) (przechodniość) dla $x, y, z \in X$ jeśli $x \preceq y$ oraz $y \preceq z$ to $x \preceq z$;
- (c) (antyśymetryczność) dla $x, y \in X$ jeśli $x \preceq y$ oraz $y \preceq x$ to $x = y$.

Para $(X, \preceq)$ jest nazywana wówczas *zbiorem częściowo uporządkowanym* lub w skrócie *poset* (ang. *partially ordered set*).

Łańcuchem długości k nazywamy dowolny ciąg $x_1, \dots, x_k$ elementów X taki, że $x_i \preceq x_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, k-1$. **Antyłańcuchem** wielkości k nazywamy zbiór $x_1, \dots, x_k$ elementów X taki, że dla dowolnych indeksów $i \neq j$ elementy x_i, x_j są nieporównywalne, tzn. $x_i \not\preceq x_j$ oraz $x_j \not\preceq x_i$. Długość najdłuższego łańcucha jest nazywana *wysokością* $(X, \preceq)$, zaś wielkość największego antyłańcucha jest nazywana *szerokością* $(X, \preceq)$. Oznaczamy $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

1. Udowodnij, że relacja podzielności $|$ jest porządkiem częściowym na dowolnym podzbiorze $\mathbb{N}$. Znajdź wysokość i szerokość $([n], |)$.

Twierdzenia Mirsky'ego i Dilwortha

2. Udowodnij, że wysokość $(X, \preceq)$ jest mniejsza lub równa minimalnej liczbie antyłańcuchów, na które można rozdzielić X .
3. Udowodnij, że szerokość $(X, \preceq)$ jest mniejsza lub równa minimalnej liczbie łańcuchów, na które można rozdzielić X .

Twierdzenie (Mirsky) Skończony poset o wysokości k można rozdzielić na k antyłańcuchów.

Twierdzenie (Dilworth) Skończony poset o szerokości k można rozdzielić na k łańcuchów.

4. Udowodnij, że dowolny poset o co najmniej $sr + 1$ elementach zawiera łańcuch długości $s + 1$ lub antyłańcuch wielkości $r + 1$.
5. Udowodnij, następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Erdős - Szekeres) Dany jest ciąg różnych liczb rzeczywistych $x_1, \dots, x_{sr+1}$. Udowodnij, że można wybrać z niego podciąg rosnący długości $s + 1$ lub podciąg malejący długości co najmniej $r + 1$.

Twierdzenie (Sperner) Niech $P([n])$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $[n] = \{1, \dots, n\}$. Wówczas $(P([n]), \subseteq)$ jest porządkiem częściowym o szerokości $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Iloczyny

Niech $(X, \preceq_X)$, $(Y, \preceq_Y)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. Wówczas ich *iloczyn kartezjański* to zbiór $X \times Y$ z częściowym porządkiem $\preceq_{X \times Y}$ zdefiniowanym jako

$$(x, y) \preceq_{X \times Y} (x', y') \iff x \preceq_X x' \wedge y \preceq_Y y'.$$

Można też rozważać porządek leksykograficzny $\preceq_{lex}$ na $X \times Y$ zdefiniowany

$$(x, y) \preceq_{lex} (x', y') \iff x \preceq_X x' \vee (x = x' \wedge y \preceq_Y y').$$

Przez $(\mathbb{N}^k, \leq)$ oznaczamy k -krotny iloczyn kartezjański $(\mathbb{N}, \leq)$ ze sobą, innymi słowy zbiór krotek liczb naturalnych długości k z porządkiem zadany współrzędnych, np. $(1, 2, 3) \leq (1, 3, 4)$ ale $(1, 2, 3) \not\leq (2, 1, 3)$. Podobnie $([n]^k, \leq)$ oznacza zbiór krotek długości k o współrzędnych z $[n]$ z porządkiem po współrzędnych. Posety $(\mathbb{N}, \leq_{lex})$, $([n], \leq_{lex})$ z porządkiem leksykograficznym definiujemy analogicznie.

6. Znajdź wysokość i szerokość posetów $([n]^k, \leq_{lex})$ oraz $([n]^k, \leq)$.
7. Czy znając wysokość/szerokość $(X, \preceq_X)$ i $(Y, \preceq_Y)$ można wyznaczyć wysokość/szerokość $(X \times Y, \preceq_{lex})$, $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$?

WQO

W tej części zajmiemy się szukaniem częściowych porządków na nieskończonych zbiorach, które nie mają nieskończonych antyłańcuchów. Jednym z przydatnych narzędzi będzie WQO.

Relację binarną $\preceq$ nazwiemy quasi-porządkiem jeśli spełnia aksjomaty (a) i (b) porządków częściowych.

Quasi-porządek $(X, \preceq)$ nazwiemy WQO (ang. *well quasi-order*) jeśli ma następującą własność: w każdym nieskończonym ciągu $x_1, x_2, \dots$ elementów X istnieją takie indeksy $i < j$, że $x_i \preceq x_j$.

8. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
 - (a) $(X, \preceq)$ jest WQO;
 - (b) $(X, \preceq)$ nie zawiera nieskończonych antyłańcuchów ani nieskończonych łańcuchów zstępujących;
 - (c) w każdym nieskończonym ciągu $x_1, x_2, \dots$ elementów X istnieje nieskończony podciąg rosnący $x_{i_1} \preceq x_{i_2} \preceq \dots$.
9. Które z poniższych porządków są WQO? Czy któryś z nich nie jest WQO ale nie ma nieskończonych antyłańcuchów?
 - (a) $(\mathbb{N}, \leq)$;
 - (b) $(\mathbb{Z}, \leq)$;

- (c) $(\mathbb{N}, |)$, gdzie $|$ to relacja podzielności;
- (d) $(\mathbb{N}^2, \leq_{lex})$;
- (e) $(\{a, b\}^*, \leq_{lex})$, gdzie $\{a, b\}^*$ oznacza zbiór słów nad alfabetem $\{a, b\}$, tzn. skończonych ciągów złożonych z symboli a, b , zaś $\leq_{lex}$ jest porządkiem leksykograficznym;
- (f) $(\{a, b\}^*, \preceq)$, gdzie $v \preceq w$ jeśli v jest prefiksem w ;
- (g) $(\{a, b\}^*, \preceq)$, gdzie $v \preceq w$ jeśli v jest infiksem w ;
- (h) grafy z porządkiem bycia podgrafem.

Lemat (Dickson) Jeśli quasi-porzadki $(X, \preceq_X)$ i $(Y, \preceq_Y)$ są WQO to również iloczyn $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$ jest WQO.

10. Udowodnij lemat Dicksona.

11. Niech $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ oznacza zbiór skończonych podzbiorów X . Jeśli $\preceq$ jest quasi-porządkiem na X to możemy zdefiniować quasi-porządek $\widetilde{\preceq}$ na $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ następująco: $A \widetilde{\preceq} B$ jeśli istnieje iniekcja $f : A \rightarrow B$ taka, że $a \preceq f(a)$ dla wszystkich $a \in A$. Udowodnij, że jeśli $(X, \preceq)$ jest WQO, to $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(X), \widetilde{\preceq})$ również.

Lemat (Higman) Niech Σ będzie alfabetem, to znaczy skończonym zbiorem symboli. Przez Σ^* oznaczamy zbiór wszystkich słów nad Σ , to znaczy skończonych ciągów o elementach z Σ . Dla słów $u, w \in \Sigma^*$ zachodzi $u \preceq w$ jeśli u jest podciągiem w . Wówczas $(\Sigma^*, \preceq)$ jest WQO.