

1. Narysuj automat niedeterministyczny (a potem deterministyczny) rozpoznający dany język nad alfabetem  $\{a, b\}$ :

(a)  $a^* + b^*$

(b)  $(a + ab)^*$

(c)  $b^*ab^*$

2. Udowodnij, że język nad alfabetem  $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$  złożony ze wszystkich zapisów dziesiętnych liczb podzielnych przez 7 jest regularny (rozpoznawany przez jakiś automat).
3. *Odwrócenie* słowa  $w \in \Sigma^*$ , oznaczane jako  $w^R$  można zdefiniować rekurencyjnie:  $\varepsilon^R = \varepsilon$ ,  $(u\sigma)^R = \sigma u^R$  dla  $u \in \Sigma^*$ ,  $\sigma \in \Sigma$ . Udowodnij, że język  $L$  jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy język  $L^R = \{w^R : w \in L\}$  jest regularny.
4. Udowodnij, że dla dowolnego języka regularnego  $L \subseteq \Sigma^*$  i dowolnego (sic!) zbioru  $X \subseteq \Sigma^*$  następujące języki, zwane odpowiednio *lewostronnym* i *prawostronnym ilorazem*  $L$ , są regularne.

$$X^{-1}L = \{w : \exists v \in X. vw \in L\} \quad LX^{-1} = \{w : \exists u \in X. wu \in L\}$$

5. Dla automatu  $\mathcal{A}$  rozpoznającego język  $L$  skonstruuj automat  $\mathcal{B}$  rozpoznający język

$$\text{Cycle}(L) = \{uw : wu \in L\}.$$

6. Niech  $L$  będzie językiem regularnym. Udowodnij, że następujące języki są regularne:

$$\frac{1}{2}L = \{w : \exists u. |w| = |u|, wu \in L\}$$

$$\sqrt{L} = \{w : ww \in L\}$$

$$\text{Root}(L) = \{w : \exists n \in \mathbb{N}. w^n \in L\}$$

$$\sqrt[l]{L} = \{w : w^{|w|} \in L\}$$