

1. Udowodnij, że dla dowolnych języków L, K

$$(L \cup K)^* = (L^* K^*)^*$$

2. Udowodnij, że wyrażenie regularne

$$(00 + 11 + (01 + 10)(00 + 11)^*(01 + 10))^*$$

definiuje język wszystkich słów nad $\{0, 1\}$, gdzie zarówno liczba zer jak i jedynek jest parzysta.

3. Reprezentujemy liczby binarnie jako słowa nad alfabetem $\{0, 1\}$. Zapisz za pomocą wyrażenia regularnego:

- (a) Zbiór liczb parzystych.
- (b) Zbiór liczb o parzystej liczbie cyfr.
- (c) Zbiór liczb, których liczba cyfr daje resztę 2 z dzielenia przez 3.
- (d) Zbiór liczb, w których zapisie nie występują dwa zera pod rząd.
- (e) Zbiór liczb o zapisie długości co najmniej 3, gdzie druga najmniej znacząca cyfra jest równa drugiej najbardziej znaczącej cyfrze.
- (f) Zbiór liczb, gdzie liczba jedynek na parzystych pozycjach jest parzysta oraz liczba jedynek na nieparzystych pozycjach jest nieparzysta.
- (g) Zbiór liczb podzielnych przez 3.

4. Rozstrzygnij, czy języków regularnych jest przeliczalnie czy nieprzeliczalnie wiele.

Uwaga! Nie mamy ustalonego alfabetu, ale przyjmujemy, że każdy alfabet będzie skończonym podzbiorem pewnego przeliczalnego zbioru.

5. (*Dodawanie*) Rozważamy alfabet $\{0, 1\}^3$, gdzie litery zapisujemy jako wektory kolumnowe. Podaj wyrażenie regularne, definiujące następujący zbiór:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} : a_1 a_2 \dots a_n + b_1 b_2 \dots b_n = c_1 c_2 \dots c_n \right\}.$$

Liczby są w zapisie binarnym.

6. Udowodnij, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje język regularny o głębokości gwiazdkowej k . Czy można ograniczyć się do alfabetu z dwoma symbolami? A z jednym symbolem? Co się dzieje jeśli dopuścimy do wyrażeń regularnych dopełnienie?