

Egzamin z logiki matematycznej
30 stycznia 2025

Zadanie 1. Udowodnij sekwent

$$\forall x \forall y x = y \longrightarrow \forall z (R(f(z)) \Rightarrow R(c))$$

w rachunku sekwentów (R jest jednoargumentowym symbolem relacyjnym, f jednoargumentowym symbolem funkcyjnym, a c stałą indywiduową).

Zadanie 2. (a) Wyjaśnij, co to znaczy, że zbiór $S \subseteq A$ jest *definiowalny bez parametrów* w danej strukturze $\mathbb{A}$.

(b) Udowodnij, że istnieje podzbiór zbioru $\mathbb{Q}$, który jest definiowalny, ale nie definiowalny bez parametrów w strukturze $(\mathbb{Q}, \leq, 1)$.

(c) Udowodnij, że każdy podzbiór zbioru $\mathbb{Q}$ definiowalny w $(\mathbb{Q}, \leq, +, 1)$ jest definiowalny bez parametrów w $(\mathbb{Q}, \leq, +, 1)$.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$ i niech $\mathbb{R}^*$ będzie ultrapotęgą $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1)^{\mathbb{N}} / \mathcal{U}$. Rozstrzygnij, czy istnieje element $b \in \mathbb{R}^*$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdej krotki elementów $\mathbb{R}$ spełniającej $a_n \neq 0$ zachodzi

$$\mathbb{R}^* \models a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 \neq 0.$$

Zadanie 4. (a) Sformułuj tw. o zwartości dla logiki pierwszego rzędu.

(b) Niech $\mathbb{A}$ będzie strukturą mającą następującą własność: dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i dowolnej krotki $a_1, \dots, a_k$ elementów A istnieje automorfizm g struktury $\mathbb{A}$ taki, że $g(a_i) \neq a_i$ dla każdego $i = 1, \dots, k$. Udowodnij, że istnieje struktura $\mathbb{B} \succ \mathbb{A}$ oraz automorfizm h struktury $\mathbb{B}$ taki, że $h(a) \neq a$ dla wszystkich $a \in A$.

Zadanie 5. Dla danej struktury $\mathbb{A}$ i formuły $\varphi(x)$ zapis $\varphi^{\mathbb{A}}$ oznacza zbiór $\{a \in A : \mathbb{A} \models \varphi[a]\}$. Rozstrzygnij, czy następujące stwierdzenia są prawdziwe dla dowolnej skończonej sygnatury σ i dowolnych formuł $\psi(x)$ i $\eta(x)$ nad sygnaturą σ :

- (a) Dla każdej teorii T nad σ , jeśli istnieje $\mathbb{A} \models T$ takie, że $|(\psi \wedge \eta)^{\mathbb{A}}| = |(\psi \wedge \neg \eta)^{\mathbb{A}}| = \mathfrak{c}$, to istnieje $\mathbb{B} \models T$ t. że $|(\psi \wedge \eta)^{\mathbb{B}}| = \aleph_0$ i $|(\psi \wedge \neg \eta)^{\mathbb{B}}| = \mathfrak{c}$.
- (b) Dla każdej teorii T nad σ , jeśli istnieje $\mathbb{B} \models T$ takie, że $|(\psi \wedge \eta)^{\mathbb{B}}| = \aleph_0$ i $|(\psi \wedge \neg \eta)^{\mathbb{B}}| = \mathfrak{c}$, to istnieje $\mathbb{A} \models T$ t. że $|(\psi \wedge \eta)^{\mathbb{A}}| = |(\psi \wedge \neg \eta)^{\mathbb{A}}| = \mathfrak{c}$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{A} = (A, \leq^{\mathbb{A}})$ będzie nieskończonym liniowym porządkiem o następującej własności (\$): dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje skończony liniowy porządek $\mathbb{L}_k$ taki, że $\mathbb{A} \equiv_k \mathbb{L}_k$.

(a) Udowodnij, że jeśli $\mathbb{B}$ jest nieskończonym liniowym porządkiem mającym własność (\$), to $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

(b) Ile, z dokładnością do izomorfizmu, jest przeliczalnych liniowych porządków mających własność (\$)?

Exam in Mathematical Logic
January 30, 2025

Problem 1. Give a proof of the sequent

$$\forall x \forall y x = y \longrightarrow \forall z (R(f(z)) \Rightarrow R(c))$$

in sequent calculus (here R is a unary relation symbol, f is a unary function symbol, and c is an individual constant).

- Problem 2.** (a) Explain what it means for a set $S \subseteq A$ to be *definable without parameters* in a given structure $\mathbb{A}$.
(b) Prove that there exists a subset of $\mathbb{Q}$ that is definable but not definable without parameters in $(\mathbb{Q}, \leq, 1)$.
(c) Prove that every subset of $\mathbb{Q}$ that is definable in $(\mathbb{Q}, \leq, +, 1)$ is definable without parameters in $(\mathbb{Q}, \leq, +, 1)$.

Problem 3. Let $\mathcal{U}$ be a non-principal ultrafilter on $\mathbb{N}$ and let $\mathbb{R}^*$ be the ultrapower $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1)^{\mathbb{N}} / \mathcal{U}$. Determine whether there exists an element $b \in \mathbb{R}^*$ such that for each $n \in \mathbb{N}$ and each tuple $a_n, \dots, a_0$ of elements of $\mathbb{R}$ such that $a_n \neq 0$ it holds that

$$\mathbb{R}^* \models a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 \neq 0.$$

- Problem 4.** (a) State the compactness theorem for first-order logic.
(b) Let $\mathbb{A}$ be a structure with the following property: for any $k \in \mathbb{N}$ and any tuple $a_1, \dots, a_k$ of elements of A , there is an automorphism g of $\mathbb{A}$ such that $g(a_i) \neq a_i$ for each $i = 1, \dots, k$. Prove that there exists a structure $\mathbb{B} \succ \mathbb{A}$ and an automorphism h of $\mathbb{B}$ such that $h(a) \neq a$ for each $a \in A$.

Problem 5. For a structure $\mathbb{A}$ and a formula $\varphi(x)$, let $\varphi^{\mathbb{A}}$ stand for the set $\{a \in A : \mathbb{A} \models \varphi[a]\}$. Determine whether the following statements are true for any finite signature σ and any formulas $\psi(x), \eta(x)$ over σ :

- (a) For any theory T over σ , if there exists $\mathbb{A} \models T$ such that $|(\psi \wedge \eta)^{\mathbb{A}}| = |(\psi \wedge \neg \eta)^{\mathbb{A}}| = \mathfrak{c}$, then there exists $\mathbb{B} \models T$ such that $|(\psi \wedge \eta)^{\mathbb{B}}| = \aleph_0$ and $|(\psi \wedge \neg \eta)^{\mathbb{B}}| = \mathfrak{c}$.
(b) For any theory T over σ , if there exists $\mathbb{B} \models T$ such that $|(\psi \wedge \eta)^{\mathbb{B}}| = \aleph_0$ and $|(\psi \wedge \neg \eta)^{\mathbb{B}}| = \mathfrak{c}$, then there exists $\mathbb{A} \models T$ such that $|(\psi \wedge \eta)^{\mathbb{A}}| = |(\psi \wedge \neg \eta)^{\mathbb{A}}| = \mathfrak{c}$.

Problem 6. Let $\mathbb{A} = (A, \leq^{\mathbb{A}})$ be an infinite linear order with the following property (\$): for any $k \in \mathbb{N}$, there is a finite linear order $\mathbb{I}_k$ such that $\mathbb{A} \equiv_k \mathbb{I}_k$.

- (a) Prove that if $\mathbb{B}$ is an infinite linear order that also has property (\$), then $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.
(b) Up to isomorphism, how many countable linear orders with property (\$) are there?