KOMENTARZ DO PRZEKŁADU I KSIĘGI *ELEMENTÓW* EUKLIDESA
L. A. Kołodziejczyk, R. Szczepkowski

DEFINICJE

We współczesnych systemach aksjomatycznych podstawowe pojęcia, te, które występują w aksjomatach, nie są definiowane. Są tak zwanymi *pojęciami pierwotnymi*: ich sens wyjaśniają wyłącznie aksjomaty.
Dopiero za pomocą pojęć pierwotnych można definiować wszystkie pozostałe.

U Euklidesa jest inaczej — *Elementy* zaczynają się listą definicji. Zgodnie z filozofią Arystotelesa, który wymagał, by wśród niedowodliwych *pierwszych zasad* każdej nauki były między innymi właśnie definicje. Miały one wyjaśniać, czym są (τί ἐστι) badane przez daną naukę obiekty, nie przesądzając jednak o ich istnieniu (ὅτι ἐστὶ).

Definicje pojawiają się nie tylko w pierwszej księdze *Elementów*, ale i w pozostałych. Nie są jednak cytowane w dowodach i nie odgrywają istotnej roli w rozumowaniach. Co więcej, niektóre z definiowanych pojęć w ogóle nigdzie dalej w tekście nie występują (patrz komentarz do D22). Z drugiej strony, pewne kluczowe pojęcia definicji nie mają. Przykładem może być pojęcie *równości* (patrz komentarz do Aksjomatów) albo *równoległoboku*.

Jednym z powodów takiego „niedopasowania” definicji do treści dzieła jest prawdopodobnie fakt, że przynajmniej część definicji została zaczerpnięta z dawniejszych tekstów matematycznych, na przykład z przedeuklidejskich wersji *Elementów*.

Definicje podane przez Euklidesa mają bardzo różnorodny charakter. Jedne (np. definicja koła) są stosunkowo precyzyjne i nie odbiegają zbyt znacznie od definicji używanych współcześnie. Inne natomiast (np. definicja punktu czy linii prostej) można traktować wyłącznie jako wsparcie dla intuicji.

Greckim słowem na definicję jest ὅρος, czyli dosłownie „granica”, „kamień graniczny”.

D1

Pojęcie punktu (σημεῖον) miało w starożytności liczne definicje. Poza definicją z *Elementów*, dwie inne zasługują na wzmiankę. Proklos (95,21)[1] odnotowuje, że pitagorejczycy definiowali punkt jako umiejscowioną jedność (μονὰς προσλαβοῦσα θέσιν). Widać tu pierwotność arytmetyki względem geometrii w matematyce pitagorejskiej.

Arystoteles z kolei wspomina w szóstej księdze Topik (141b20) definicję punktu jako granicy linii (γραμμῆς πέρας) – por. też D3. Ma to być

1 Wszystkie odnośniki do Proklosa dotyczą jego *Komentarza do pierwszej księgi Elementów Euklidesa.*

przykład definicji mało naukowej: pojęcie wcześniejsze logicznie (punkt) określa się przy użyciu późniejszego (linia).

Należy przy okazji zauważyć, że dawniejszą nazwą punktu było στιγμή, częste jeszcze u Arystotelesa.

D2

Euklidesowa *linia* (γραμμή) odpowiada w przybliżeniu dzisiejszemu pojęciu *krzywej*. Definicja z *Elementów* ujmuje linię jako „obiekt jednowymiarowy", ale w starożytności zdarzały się również definicje bliższe współczesnemu pojęciu krzywej parametrycznej. Przykładowo, Proklos (97.9) omawia, niechętnie zresztą, definicję linii jako przepływu punktu (σημείου ῥύσις).

Starożytni stworzyli bogatą klasyfikację linii (Procl. 111,1nn.), w *Elementach* jednak występują wyłącznie fragmenty prostych (zazwyczaj skończone) oraz łuki okręgów.

D4

Proste w *Elementach* są z reguły skończone (dziś nazwalibyśmy je odcinkami). Jak się wydaje, Euklides podzielał filozoficzny pogląd Arystotelesa, który przyjmował (Phis. 206a), że nieskończoność istnieje jedynie potencjalnie, a nie aktualnie. Widać to na przykład w sposobie, w jaki Euklides formułuje twierdzenie, iż liczb pierwszych jest nieskończenie wiele (twierdzenie 20 księgi IX). Należy jednak zauważyć, że w Elementach mimo to mowa czasem o prostych nieskończonych (patrz np. Z12)[2].

Niełatwo stwierdzić, jaki jest sens podanej przez Euklidesa definicji prostej. Proklos uważał, że ma ona charakteryzować prostą jako linię geodezyjną: odległość między dwoma punktami jest **równa** ich odległości mierzonej wzdłuż łączącej je prostej (podczas gdy odległość mierzona np. wzdłuż łuku okręgu jest większa). Definicja Euklidesa pokrywałaby się więc, zdaniem Proklosa, z tą, którą później podał Archimedes. Interpretacja taka jest jednak wątpliwa, gdyż trudno byłoby ją zastosować do analogicznie sformułowanej definicji płaszczyzny (D7).

W platońskim dialogu *Parmenides* (137e) mamy następującą definicję: εὐθύ γε, οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ („proste jest to, czego środek przesłania oba końce"). Podobną definicję podaje Arystoteles (Topic. 148b27). Heath (s. 166) sugeruje, być może trafnie, że Euklides chciał zachować sens takiej właśnie definicji, ale pozbawić ją odniesienia do zmysłu wzroku. Stąd sformułowanie występujące w *Elementach*.

D8

Jak podaje Proklos (121nn.), w starożytności panowała niezgoda nie tylko co do tego, jak definiować kąt, ale nawet co do tego, do której z Arystotelesowskich kategorii go zaliczyć. Niektórzy autorzy uważali, że kąt

2 Litera Z oznacza zagadnienia, tj. twierdzenia lub zadania konstrukcyjne (patrz niżej).

należy do kategorii ilości (ποσόν), inni – że jakości (ποιόν), inni wreszcie – że relacji (πρός τι).

Euklides uznaje kąt za wzajemne nachylenie (κλίσις) dwu linii. Według Heatha (s. 176), jest to zapewne odejście od dawniejszej tradycji: jeszcze Arystoteles myślał o kącie raczej jako o załamaniu (κλάσις) pojedynczej linii (por. np. Metaph. 1016a13)

Heath zwraca też uwagę na osobliwość wymogu, żeby linie tworzące kąt „nie leżały na wspólnej prostej". Wymóg ten ma wykluczyć kąt zerowy i półpełny (Grecy nie uznawali takich kątów, jak również kątów większych od półpełnego), ale w sformułowaniu z *Elementów* pasuje jedynie do sytuacji, w której linie tworzące kąt są proste (czyli do sytuacji wyodrębnionej w następnej definicji).

Spośród innych starożytnych definicji kąta szczególnie ciekawa wydaje się ta, którą Proklos (125,15) przypisuje między innymi swojemu nauczycielowi Plutarchowi z Aten. Antycypuje ona niejako nowożytne ujęcie „różniczkowe", brzmi bowiem: „kąt jest to pierwsza odległość (πρῶτον διάστημα) przy punkcie". Chodzi oczywiście o punkt przecięcia się czy też załamania linii.

Podobnie jak w wypadku linii, starożytni zbudowali bogatą klasyfikację kątów. Podaje ją za Geminosem Proklos (126,7nn.).

D10

Euklides nigdzie nie definiuje, co to znaczy, że dwa kąty są równe albo że jeden kąt jest większy od drugiego. Intuicyjnie rzecz biorąc, kąty są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są przystające, co w wypadku kątów prostoliniowych jest równoważne równości miar. Należy jednak podkreślić, że pojęcie miary kąta – jako pewnej funkcji przypisującej kątom liczby – nie występuje w *Elementach* i jest zupełnie obce duchowi tego dzieła.

Por. też obszerniejszą dyskusję Euklidesowego pojęcia *równości* w komentarzu do Aksjomatów.

D15

Rękopisy podają wersję obszerniejszą: „Kołem jest figura płaska zawarta w obrębie jednej linii, zwanej περιφέρεια, takiej, że wszystkie proste spadające na nią (czyli na περιφέρειαν koła) z jednego spośród punktów wewnątrz figury są sobie równe."

W tej wersji definicja tłumaczy więc, że linia ograniczająca koło nazywa się περιφέρεια (słowo, którego Euklides używa zarówno na oznaczenie całego okręgu, jak i dowolnego łuku okręgu).

Wydaje się jednak, że wstawki dotyczące περιφέρεια stanowią interpolację — nie ma ich bowiem ani w starożytnych komentarzach, ani w zachowanym przekazie papirusowym (Pap. Herc. 1061). Powodem, dla którego dokonano interpolacji, był zapewne fakt, że nie objaśnione wcześniej słowo περιφέρεια pojawia się w D17, D18.

D17

Wzmianka o tym, że średnica dzieli koło na pół, nie jest, rzecz jasna, częścią definicji i w zasadzie wymagałaby dowodu (starożytni przypisywali jego przeprowadzenie Talesowi). Została tu umieszczona zapewne dlatego, że wyjaśnia sens nazwy „półkole”, pojawiającej się w następnej definicji.

D18

Definicji środka półkola nie ma w rękopisach, podaje ją Proklos (158,24). Rękopisy mają natomiast po D18 definicję odcinka koła, którą uważa się za interpolację zaczerpniętą z definicji szóstej trzeciej księgi *Elementów*.

D20

Należy zauważyć, że wedle tej definicji trójkąt równoramienny (ἰσοσκελές) ma dokładnie dwa równe boki. Formalnie rzecz biorąc, trójkąt równoboczny (ἰσόπλευρον) nie jest więc szczególnym przypadkiem równoramiennego (por. analogiczny przypadek w D22). W praktyce jednak Euklides zdaje się nie przywiązywać specjalnej wagi do tej konwencji: nie dowodzi na przykład odrębnej wersji twierdzenia o równości kątów przy podstawie (Z5) dla trójkątów równobocznych.

Trójkąt nierównoramienny — σκαληνὸν.

D22

Przed Euklidesem słowo τετράγωνον (dosłownie: czworokąt) mogło oznaczać zarówno kwadrat, jak i dowolny czworobok. Dzięki wprowadzeniu w D19 słowa τετραπλεύρων na oznaczenie dowolnej figury czworobocznej, Euklides może używać słowa τετράγωνον wyłącznie w znaczeniu „kwadrat”.

Różnobok (ἑτερόμηκες) to prostokąt nie będący kwadratem. Romb (ῥόμβος) to według dzisiejszej terminologii romb nie będący kwadratem. Romboid (ῥομβοειδές) to równoległobok nie będący prostokątem ani rombem (zauważmy, że Euklides nie może wprowadzić w tym miejscu pojęcia równoległoboku jako czworoboku o bokach parami równoległych, gdyż nie zdefiniował jeszcze linii równoległych). Wszystkie te terminy nie występują w dalszym tekście *Elementów* i zapewne pochodzą z dawniejszych zbiorów definicji.

Słowo trapez (τραπέζιον) miało czasem w starożytności węższe, bliższe współczesnemu znaczenie czworokąta z parą boków równoległych. W takich wypadkach czworokąty bez boków równoległych nazywano trapezoidami (Procl. 170,4n.)

D23

εκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον tłumaczymy jako „przedłużone nieskończenie”, a nie „w nieskończoność” gdyż ten drugi zwrot mógłby sugerować, że Euklides zakłada istnienie nieskończoności aktualnej.

Po obu stronach — *ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη*.

O AKSJOMATYCE *ELEMENTÓW*

Na aksjomatykę *Elementów* składają się postulaty (*αἰτήματα*) i aksjomaty (*ἀξιώματα* albo *κοιναὶ ἔννοιαι*). Postulatów jest pięć, liczba aksjomatów jest trudna do ustalenia, gdyż nie wiadomo, które z nich są autentyczne. W przeciwieństwie do definicji, postulaty i aksjomaty pojawiają się tylko w pierwszej księdze. Jest to skądinąd istotna wada *Elementów*, bo na przykład księgi stereometryczne (XI-XIII) wymagałyby oddzielnej aksjomatyki.

Już w starożytności nie było zgody co do tego, czym różnią się postulaty od aksjomatów. Pojawiły się w tej sprawie przynajmniej trzy poglądy.

Według pierwszego — Proklos podaje, że głosił go Geminos — Postulaty mają się do aksjomatów tak, jak zadania konstrukcyjne do twierdzeń. Postulaty mówią, że coś *można zrobić*, aksjomaty zaś, że *coś zachodzi*. Koncepcja ta wydaje się jednak wątpliwa: spośród pięciu aksjomatów tylko trzy pierwsze dotyczą wykonalności pewnych konstrukcji, pozostałe dwa są raczej podobne do twierdzeń.

Drugi pogląd — znany nam również z komentarza Proklosa — jest taki, że aksjomaty są to pewniki o treści ogólnej, wspólne wszystkim dziedzinom matematyki czy wręcz nauki, postulaty natomiast to specyficzne pewniki geometrii. Ten pogląd jest być może trafniejszy: na przekazanej przez kodeksy liście są wprawdzie dwa aksjomaty o treści zdecydowanie geometrycznej, ale autentyczność obu jest co najmniej dyskusyjna.

Trzeci pogląd jest zapewne chronologicznie pierwszy, pochodzi bowiem od Arystotelesa i został wyrażony w *Analitykach wtórych*. Jest przy tym dość prawdopodobne, że właśnie *Analityki* stosunkowo najlepiej wyjaśniają, co na temat postulatów i aksjomatów sądził Euklides.

Niektóre sformułowania Stagiryty budzą wątpliwości interpretacyjne, wydaje się jednak, że według niego postulaty różnią się od aksjomatów dwojako. Po pierwsze, jak poprzednio, ogólnością: aksjomaty są ogólne, typu „jeśli od równych odjąć równe, części pozostałe będą równe”, postulaty dotyczą danej dziedziny, np. geometrii. Po drugie, stopniem oczywistości: aksjomaty są oczywiste i niedowodliwe, postulaty oczywiste nie są i w zasadzie mogłyby podlegać dowodowi. Każda nauka musi jednak przyjąć bez dowodu jakieś postulaty: na przykład takie, które stwierdzają istnienie podstawowych przedmiotów badania (jak punkty i linie w geometrii). Powinno jednak być tych postulatów jak najmniej.

Ważniejszy może od tego, na czym dokładnie polegała różnica między postulatami i aksjomatami, jest fakt następujący: dla Euklidesa stanowiły one (i jedne, i drugie) podstawę jedynej *prawdziwej* geometrii, opisującej własności *rzeczywistej* przestrzeni. Dziś jest całkiem inaczej: matematycy przywykli już do tego, że można rozważać w zasadzie dowolne teorie aksjomatyczne. Od tego, jakie aksjomaty dobierzemy, zależy tylko, w jakich strukturach nasza teoria będzie spełniona. W szczególności, nie ma jednej prawdziwej geometrii. Jest mnóstwo różnych systemów geometrii; wiele z nich może być matematycznie interesujących lub użytecznych w opisie zjawisk fizycznych.

Aksjomatyczna metoda *Elementów* była przez długie wieki niedoścignionym wzorem naukowej ścisłości, i to nawet wtedy, gdy już zdano sobie sprawę, że aksjomatyka Euklidesa niekoniecznie musi być „jedyną prawdziwą", i że równie wartościowe mogą być również aksjomatyki z nią niezgodne. Dopiero w drugiej dziewiętnastego wieku zauważono (pierwszym, który tego dokonał, był Moritz Pasch), że nader liczne rozumowania w *Elementach* zawierają jednak istotne luki. Euklides bardzo często wyciąga bowiem rozmaite wnioski w oparciu o intuicję albo o przedstawiający sytuację z danego wywodu rysunek. Nieraz zdarza się przy tym, że wnioski te wcale nie wynikają z postulatów i aksjomatów.

Pod koniec dziewiętnastego wieku zaczęto więc konstruować nowe aksjomatyczne ujęcia geometrii elementarnej, zgodne z duchem *Elementów*, ale wolne od ich słabości. Pierwszy taki system aksjomatów zaproponował właśnie Pasch (w 1882r.). Najsłynniejszy jednak stał się system, który w 1899r., w dziele pt. *Podstawy geometrii*, podał David Hilbert.

Nie jest zadaniem niniejszego komentarza szerzej omawiać system Hilberta i porównywać go z systemem Euklidesa. Znakomicie robi to w swojej książce Hartshorne. Będziemy się natomiast starali — za Hartshornem zresztą — zwracać czasem przy poszczególnych twierdzeniach uwagę na to, jak system Hilberta (czy raczej jego nieco zmodyfikowana wersja, której używa Hartshorne) radzi sobie w tych sytuacjach, w których Euklides „oszukuje". Jeden typ takich sytuacji najwygodniej jest jednak omówić ogólnie.

Wśród różnych niedociągnięć aksjomatyki *Elementów* szczególnie istotny jest brak jakichkolwiek postulatów dotyczących wzajemnego położenia badanych figur. Niejednokrotnie kluczowa dla dowodu jest wiedza np. o tym, że jakiś punkt leży *między* dwoma innymi, że dwa punkty leżą *po tej samej stronie* danej prostej albo że jakiś odcinek przebiega *wewnątrz* danego kąta. Informacje tego rodzaju Euklides po prostu odczytuje z rysunku. Rzecz jasna, rozumowanie w systemie aksjomatycznym powinno wyglądać inaczej.

Stąd w systemie Hilberta (a wcześniej u Pascha) pojawia się cała klasa aksjomatów, które u Euklidesa nie występują. Są to tak zwane *aksjomaty porządku* albo „leżenia między".

Wprowadza się trójargumentową relację pierwotną między punktami leżącymi na wspólnej prostej: „B leży między A i C" (punkt jest też pojęciem pierwotnym, podobnie jak prosta). Aksjomaty porządku określają, jakie własności spełnia ta relacja. Najsłynniejszy z nich, Aksjomat Pascha, stanowi: jeśli punkty A, B, C nie leżą na wspólnej prostej, a prosta P nie zawiera żadnego z nich, ale zawiera pewien punkt D leżący między A i B, to P zawiera albo jakiś punkt między A i C, albo jakiś punkt między B i C (ale nie zawiera punktów obu typów). W języku swobodniejszym: prosta nie zawierająca żadnego z wierzchołków trójkąta, a przecinająca jeden z jego boków, przecina dokładnie jeden z pozostałych boków.

Okazuje się następnie, że za pomocą pojęć punktu, prostej i „leżenia między” można zdefiniować np. odcinek, kąt, wnętrze kąta czy „bycie po tej samej stronie prostej”. Przyjęte aksjomaty pozwalają natomiast udowodnić różne potrzebne w dowodach własności tych pojęć i uzupełnić luki w tych miejscach, w których Euklides „odczytywał z rysunku”.

P1

Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Często uważa się, że pierwszy postulat *implicite* orzeka również jednoznaczność opisanej w nim konstrukcji, tzn. że istnieje tylko jedna prosta łącząca dwa punkty (we współczesnej terminologii: dla dwu danych punktów istnieje dokładnie jeden odcinek, którego te punkty są końcami). Potwierdza to uwaga Proklosa (239,16). Z drugiej strony, w samym tekście postulatu wzmianki o takiej jednoznaczności nie ma.

Euklides korzysta czasem z jedyności prostej łączącej dwa punkty. Po raz pierwszy ma to miejsce w Z4. Można by sądzić, że pozwala mu na to Aksjomat 9: „dwie proste nie zawierają obszaru”. Z reguły przyjmuje się jednak, że jest on interpolacją (patrz komentarz do Aksjomatów i do Z4).

P2

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

Podobnie jak poprzednio, można sądzić, że postulat drugi milcząco zakłada jednoznaczność opisywanej konstrukcji (dwie różne proste nie mogą mieć wspólnego odcinka). Skądinąd, jak podaje Proklos (214,18), epikurejczyk Zenon z Sydonu (II – I w. p.n.e.) zarzucał geometrom, że nie zakładają oni tej jednoznaczności, a jest ona według niego potrzeba już w pierwszym wywodzie *Elementów* (a na pewno jest nieraz potrzebna dalej).

P3

Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Rzuca się w oczy osobliwość gramatyczna: w poprzednich postulatach czasowniki, „poprowadzić” i „przedłużyć”, były w bezokoliczniku strony czynnej aorystu (czasu przeszłego nieokreślonego): (*ἀγαγεῖν*, *ἐκβαλεῖν*) Tutaj natomiast czasownik „narysować” jest, przynajmniej w rękopisach, w bezokoliczniku strony bierno-zwrotnej czasu teraźniejszego: *γράφεσθαι*.

Nie wiadomo, skąd ta rozbieżność. Co ciekawe, u Proklosa (185, 3) jest *γράψαι*, czyli ponownie strona czynna aorystu.

Słowo *διαστήμα* tłumaczymy jako „promień”. Dosłownie znaczy ono „odległość, rozwartość”, ale jest też terminem technicznym używanym do oznaczenia promienia koła.

Znów, jak w wypadku postulatu pierwszego i drugiego, można uważać, że i ten postulat zakłada jednoznaczność opisywanej konstrukcji (dwa różne okręgi nie mogą mieć wspólnego łuku). I znów, jak w wypadku postulatu drugiego, Zenon z Sydonu krytykuje geometrów za to, że tej jednoznaczności nie zakładają.

P4

Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

Jak była mowa wyżej (komentarz do D10), Euklides nie definiuje równości kątów, ale intuicyjny sens postulatu jest taki, że wszystkie kąty proste są przystające, czyli mają równą miarę.

W niektórych rozumowaniach *Elementów*, Euklides stosuje tzw. metodę superpozycji, czyli „nakładania” jednych figur na drugie. Metoda ta nie ma uzasadnienia w przyjętym systemie aksjomatów (patrz komentarz do Z4).

Gdyby jednak uznać ją za dopuszczalną, postulat czwarty można by bardzo łatwo udowodnić. Ideę dowodu przedstawia już Proklos (188,20nn.). W systemie Hilberta zresztą równości kątów prostych się dowodzi.

Heath (s. 201) zauważa, że Euklides musiał jakoś stwierdzić równość kątów prostych przed sformułowaniem postulatu piątego, który mówi o „kątach mniejszych od dwu kątów prostych”.

P5

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δ ύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

„kąty wewnętrzne po jednej stronie mniejsze od dwu kątów prostych” — zwrot bardzo charakterystyczny dla *Elementów*. „X, Y są równe (odp. mniejsze od) Z, T” znaczy normalnie „suma X i Y jest równa sumie (odp. mniejsza od sumy) Z i T”. Gdy Euklides chce powiedzieć, że X jest równe Z, a Y jest równe T, pisze zwykle, że „X, Y są równe odpowiednio (*ἑκατέρα ἑκατέρᾳ*) Z, T”. Czasem jednak nie przestrzega tej zasady zbyt dokładnie i słowo „odpowiednio” gubi.

*

Piąty postulat to oczywiście słynny postulat o równoległych. Uważa się na ogół, że sformułował go sam Euklides.

Jak łatwo dostrzec, Postulat 5 jest znacznie bardziej skomplikowany niż pozostałe, w związku z czym już w czasach starożytnych budził wątpliwości. Przykładowo, Proklos (191,21nn.) utrzymywał, że powinno się go skreślić z listy postulatów, jest bowiem twierdzeniem wymagającym dowodu.

„Dowody” postulatu o równoległych podawali w ciągu wieków bardzo liczni matematycy: w starożytności na przykład Ptolemeusz i właśnie Proklos. Wszystkie te rozumowania zawierały jednak luki. Zazwyczaj milcząco przyjmowano w nich założenia równoważne postulatowi o równoległych na gruncie reszty aksjomatyki. Lista takich równoważników stała się w ten sposób bardzo obszerna, najsłynniejszy wśród nich jest tzw. Aksjomat Playfaira: przez dany punkt przechodzi co najwyżej jedna prosta równoległa do danej. Aksjomat Playfaira pojawia się skądinąd już w komentarzu Proklosa (John Playfair żył w latach 1748-1819).

Ostatecznie, jak wiadomo, okazało się, że Postulatu 5 nie da się dowieść w oparciu o pozostałe: jest od nich niezależny. Przyjęcie jego negacji prowadzi do tak zwanych *geometrii nieeuklidesowych*. Pierwszym, który je badał, był w pewnym sensie Girolamo Saccheri, ale jego traktat *Euclides ab omni naevo vinidicatus* (z 1733 r.) miał właśnie służyć pokazaniu, że coś takiego jak nieeuklidesowa geometria nie może istnieć. Za odkrywców geometrii nieeuklidesowej uważa się więc matematyków późniejszych: Carla Friedricha Gaussa (1777-1855), Jánosa Bolyai (1802-1860) i Nikołaja Łobaczewskiego (1793-1856).

Twierdzenia, których dowód nie wymaga piątego postulatu, ani jego negacji należą do tak zwanej *geometrii absolutnej*. W jej skład wchodzi między innymi pierwszych 28 twierdzeń *Elementów*, postulat o równoległych użyty zostaje dopiero w dowodzie twierdzenia 29. Wydaje się, że Euklides celowo stara się jak najbardziej opóźnić wprowadzenie Postulatu 5, chcąc na początku swojego dzieła zgrupować wyniki od niego nie zależące.

Więcej na temat historii piątego postulatu znaleźć można w każdym obszerniejszym komentarzu do *Elementów*. Zarówno o historii, jak i (znacznie obszerniej) o geometriach nieeuklidesowych pisze Hartshorne. Polskiemu czytelnikowi warto polecić *Wykłady z historii matematyki* Marka Kordosa (wykład XIX) oraz książeczkę Stefana Kulczyckiego pt. *Geometria nieeuklidesowa*, która zawiera oprócz przystępnego wykładu geometrii nieeuklidesowej także sporo informacji historycznych.

AKSJOMATY:

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.
Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.
Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].
[Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.]

W rękopisach *Elementów* aksjomaty nazywane są κοιναὶ ἔννοιαι czyli *sądy powszechne*. Terminu ἀξιώματα używa Proklos (194,8), który dodaje też, że według Arystotelesa i geometrów „aksjomat i sąd powszechny są tym samym".

Słowo „rzeczy", nie występujące jawnie w greckim tekście aksjomatów, zostało dodane w niektórych miejscach przekładu (np. τὰ ἴσα – „rzeczy równe") zarówno ze względów stylistycznych, jak i dlatego, że Euklides czasem cytuje aksjomaty w sytuacjach, w których brak rzeczownika byłby mylący. Przekład taki wydaje się ponadto usprawiedliwiony specyficzną rolą, jaką w grece pełni urzeczownikowiający rodzajnik.

Wysoce sporna jest kwestia autentyczności poszczególnych aksjomatów (pod koniec dziewiętnastego wieku P. Tannery twierdził nawet, że wszystkie są nieautentyczne). Stosunkowo najpewniejsze wydają się aksjomaty 1, 2 i 3, które uznają dwaj zajmujący się tym zagadnieniem starożytni komentatorzy — Heron i Proklos.

Aksjomaty 4, 5, 6, których nie ma u żadnego z tych dwu autorów, uważane są na ogół za nieautentyczne. Argumentów na rzecz ich nieautentyczności nie można jednak uznać za konkluzywne. Przykładowo, Proklos (196-197), a za nim Heath (s. 223n.), odrzuca aksjomat 5 dlatego, że wynika on z pierwszych trzech (a dokładniej z drugiego). Następnie Heath pisze (s. 224), że trudno, by aksjomat szósty był autentyczny, jeśli piąty nie jest. Ale przecież aksjomat szósty, w przeciwieństwie do piątego, już *nie* wynika z pierwszych trzech!

Aksjomat 9 także odrzucają zarówno Heron, jak i Proklos. Wydaje się, że jest on interpolacją dodaną po to, by wyjaśnić fragment rozumowania z dowodu twierdzenia 4, gdzie Euklides chce wywnioskować, że dwie proste są w istocie tożsame, z tego, że mają ten sam początek i koniec. Z tego powodu odstąpiliśmy tutaj od wydania Stamatisa i wyłączyliśmy ten fragment z tekstu.

Wątpliwy jest status aksjomatów 7 i 8, które Heron odrzuca, a Proklos przyjmuje. Każdy z tych dwu aksjomatów odpowiada pewnemu występującemu w *Elementach* typowi rozumowania:

a) Kiedy Euklides korzysta z tzw. metody superpozycji (patrz komentarz do Z4), używa zwrotów typu „x pokryje się z y i będzie mu równe", bliskich brzmieniu aksjomatu siódmego.

b) W niektórych dowodach nie wprost (przez *reductio ad absurdum*) Euklides pokazuje, że z danego założenia wynikałaby równość dwu figur, z których jedna jest, jak widać z rysunku, częścią właściwą drugiej. Korzysta wtedy ze sformułowań w rodzaju „x będzie równe y, czyli mniejsze większemu, co jest niedorzeczne" (patrz np. Z6) albo innych zwrotów pokrewnych aksjomatowi ósmemu, ale nie zawierających słów „całość" ani „część".

W przeciwieństwie do pierwszych trzech aksjomatów, ani siódmy, ani ósmy nigdy nie są dosłownie cytowane w dowodach. Możliwe więc, że są one, podobnie jak aksjomat dziewiąty, interpolacjami, które zostały dodane, aby „dostarczyć uzasadnienia" wyżej wymienionym sposobom rozumowań.

Wszystkie aksjomaty oprócz dziewiątego dotyczą pojęcia *równości*. Pojęcie to, niezwykle w *Elementach* ważne, nie jest nigdzie zdefiniowane. Z intuicyjnego punktu widzenia, „równość” to dla Euklidesa „równość miary”: odcinki są równe, jeśli są równej długości, kąty są równe, jeśli mają równe miary, wielokąty są równe, jeśli mają równe pola. To jednak tylko intuicja: idea miary — jako pewnej liczby związanej z figurą — w *Elementach* bowiem nie występuje.

Równość musimy więc potraktować jako pojęcie pierwotne, o którym teoretycznie wiadomo tylko tyle, ile ustalają aksjomaty. W praktyce zaś wiadomo tyle, ile ujawniają rozumowania Euklidesa. Jedynie bowiem część tego, co Euklides zakłada o równości, została *explicite* ujęta w aksjomatach — niezależnie nawet od tego, które z nich są autentyczne.

Tak więc, milcząco zakłada się na przykład, że równość jest relacją zwrotną (każdy obiekt jest równy samemu sobie) i symetryczną (jeśli X jest równe Y, to i *vice versa*). Przy tych założeniach Aksjomat 1 gwarantuje, że równość jest też przechodnia (jeśli X jest równe Y, a Y jest równe Z, to i X jest równe Z), czyli jest tak zwaną relacją równoważności. Inny przykład: z Aksjomatu 8 wiemy, że z równością związany jest pewien porządek; z dwu obiektów, które nie są równe, jeden może być większy. Aksjomat ten dodatkowo ustala pewien warunek wystarczający dla tego, żeby coś było mniejsze od czegoś, ale warunek ten nie jest bardzo jasny i dopiero dowody i konstrukcje pokazują, jaki jest jego sens. Treść aksjomatu 7 z kolei, choć wyraźnie geometryczna, jest już wręcz niezrozumiała, dopiero dowody twierdzeń 4 i 8 pozwalają zrozumieć, o co w nim chodzi.

Uważniejsza lektura pokazuje, że Euklides za równe uważa figury, które nazwalibyśmy przystającymi, a ponadto zakłada, że równość spełnia warunki określone w aksjomatach 1-6 i 8 (aksjomat 8 spełnia w tym sensie, że jeśli np. jeden wielokąt jest „podzbiorem właściwym” drugiego, to nie jest mu równy). Istnieje współczesny odpowiednik takiego pojęcia równości. Figury prostoliniowe X i X′ są *równoważne przez rozkład*, jeśli dają się przedstawić jako sumy nie nakładających się na siebie (tj. stykających się co najwyżej bokami) trójkątów $T_1, \ldots, T_n$, i, odpowiednio, $T'_1, \ldots, T'_n$, w taki sposób, że dla każdego j, trójkąty T_j i T'_j są przystające. Figury X i X′ mają *równą zawartość*, jeśli istnieją figury Y, Y′ takie, że a) X nie nakłada się na Y, b) X′ nie nakłada się na Y′, c) Y i Y′ są równoważne przez rozkład i d) suma X z Y jest równoważna przez rozkład sumie X′ z Y′.

Dużo o tych pojęciach pisze Hartshorne (rozdziały 22, 23 i 24), trochę informacji można też znaleźć w *Ciągłości* Jerzego Mioduszewskiego (rozdział V).

Dla zilustrowania tego, jak wielki bywał w starożytności zamęt w sprawie zarówno statusu aksjomatów, jak i dopuszczalnych metod dowodzenia, warto zacytować za Proklosem (194,25nn.) „dowód” Euklidesowego Aksjomatu 1 podany przez Apolloniosa z Pergi (III w. p.n.e.), autora słynnego traktatu o stożkowych:

„Niech A będzie równe B, a B równe C. Twierdzę, że i A jest równe C. Skoro bowiem A jest równe B, to zajmuje tyle samo miejsca, co ono. A skoro B jest równe C, to też zajmuje tyle samo miejsca, co on. Również A więc zajmuje tyle samo miejsca, co C. Są więc równe”.

ZAGADNIENIA

Z1

„prosta skończona” — *εὐθεῖα πεπερασμένη*.
„narysujmy” — *γεγράφθω*. Bardzo częsty w *Elementach* tryb rozkazujący strony bierno-zwrotnej czasu przeszłego dokonanego (*perfectum*) oddajemy w przekładzie konsekwentnie przez pierwszą osobę liczby mnogiej trybu rozkazującego strony czynnej.
„pociągnijmy” — *ἐπεζεύχθωσαν*. Czasownika *ἐπιζεύγνυμι*, dosłownie znaczącego „połączyć”, Euklides używa najczęściej w znaczeniu „poprowadzić” (prostą). Tłumaczymy wówczas: „pociągnąć”, przekład „poprowadzić” rezerwując dla czasownika *ἄγω*.
„wykazaliśmy” — *ἐδείχθη*.

*

Budowa zagadnienia. Zagadnienia Elementów składają się z kilku wyraźnie wyodrębnionych części, których bywa aż sześć:
a) sformułowanie — *πρότασις*
b) wyłożenie — *ἔκθεσις*
c) uściślenie — *διόρισμος*
d) konstrukcja — *κατασκευή*
e) dowód — *απόδειξις*
f) podsumowanie — *συμπέρασμα*

Trzy z tych części, mianowicie: sformułowanie, dowód i podsumowanie, są obecne zawsze.

Rola *sformułowania* nie wymaga większych komentarzy. W pierwszym zagadnieniu Elementów brzmi ono: „Na danej prostej skończonej skonstruować trójkąt równoboczny”.

Wyłożenie ustala dane i wprowadza ich oznaczenia: „Niech daną prostą skończoną będzie AB”.

Uściślenie w zasadzie powtarza *sformułowanie* (tzn. określa co się twierdzi lub co jest zadaniem) wykorzystując wprowadzone oznaczenia: „Na prostej AB należy teraz skonstruować trójkąt równoboczny”.

Po *uściśleniu* zazwyczaj następuje *konstrukcja*: „Narysujmy koło BCD o środku A i promieniu AB. Dalej, narysujmy koło ACE o środku B i promieniu BA. Z punktu C, w którym przecinają się te koła, pociągnijmy proste CA, CB do punktów A, B”.

Kiedy wszystkie niezbędne obiekty zostały już skonstruowane, następuje *dowód*: „Ponieważ punkt A jest środkiem koła CDB, prosta AC jest równa AB. Dalej, ponieważ punkt B jest środkiem koła CAE, prosta BC jest równa BA. Wykazaliśmy jednak, że również CA jest równe AB. Obie proste CA, CB są więc równe AB. Rzeczy równe zaś temu samemu są też sobie równe. Również CA jest więc równe CB. Wszystkie trzy proste CA, AB, BC są więc sobie równe. Trójkąt ABC jest więc równoboczny i został skonstruowany na danej prostej skończonej AB".

Ostatnią częścią jest *podsumowanie*. Zwykle powtarza ono w nieco zmienionej stylistyce jedną z poprzednich części: w twierdzeniach *sformułowanie*, w zadaniach *uściślenie*. Dalej następują słowa „co należało wykazać" lub, odpowiednio, „co należało wykonać" —
ὅπερ ἔδει δεῖξαι, *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι*.

W Z1 *podsumowanie* powinno brzmieć: „Na danej prostej AB skonstruowaliśmy więc trójkąt równoboczny. Co należało wykonać". To zagadnienie jest jednak nietypowe, gdyż pierwszego z tych zdań nie ma w rękopisach.

Uwaga o oznaczeniach. Euklides posługuje się oznaczeniami literowymi w sposób nieco swobodny. Kiedy np. rysuje „koło BCD o środku A i promieniu AB" nie mówi nic o tym, gdzie mają być umieszczone punkty C i D, w szczególności, że C ma być punktem przecięcia koła BCD i koła ACE, które zostanie skonstruowane dopiero później. Tego rodzaju szczegóły należy odczytać z rysunku.

W trakcie dowodu Euklides przyjmuje bez uzasadnienia, że narysowane przezeń koła przetną się w jakimś punkcie C (a ściślej, że przetną się ograniczające je okręgi). Otóż założenie to nie jest na gruncie przyjętej aksjomatyki uprawnione. Istotnie, wśród postulatów nie ma żadnego, który mógłby zagwarantować, że dane dwa okręgi się przetną (jest więc inaczej niż w wypadku prostych, dla których mamy Postulat 5).

W dowodzie jest więc luka, i nie jest to luka przypadkowa. Okazuje się, że aksjomaty Euklidesa nie wystarczają, by udowodnić istnienie trójkąta równobocznego o dowolnym zadanym boku (Hartshorne, s. 373). Potrzebny jest dodatkowy aksjomat: dowolne dwa okręgi, z których jeden zawiera i punkt leżący na zewnątrz, i punkt leżący wewnątrz drugiego, muszą się przeciąć.

Oczywiście, aksjomat ten można zastąpić dowolnym silniejszym, na przykład słynnym aksjomatem ciągłości Dedekinda (patrz np. Hartshorne, ss. 115n.). Aksjomat Dedekinda jest jednak niezwykle silny (system Hilberta z aksjomatem Dedekinda ma z dokładnością do izomorfizmu tylko jeden model: płaszczyznę kartezjańską nad liczbami rzeczywistymi), a przy tym zupełnie niepotrzebny ani w tym zagadnieniu, ani w ogóle w całej pierwszej księdze.

Z2

„położyć" — *θέσθαι*. W tym akurat miejscu przekładem trafniejszym byłoby może „zaczepić", które jednak byłoby bardzo niezręczne tam, gdzie Euklides konstrukcję z Z2 stosuje (np. w Z11). Stąd dalekie od ideału „położyć”.

„przedłużmy DA, DB po prostej prostymi AE, BF” — *ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς* ΔΑ, ΔΒ *εὐθεῖαι αἱ* ΑΕ, ΒΖ.

„Skonstruujmy trójkąt równoboczny DAB” — jak widać, w drugim zagadnieniu Euklides korzysta już nie tylko z aksjomatów bądź postulatów, ale i z wykonalności konstrukcji przeprowadzonej w Z1.

„Przedłużmy DA, DB po prostej prostymi AE, BF” — Euklides używa tu P2.

*

Proklos (227) polemizuje z tymi, którzy chcieliby konstrukcję z tego zagadnienia wykonać prościej: korzystając z P2 narysować koło o środku A i promieniu BC, a następnie połączyć punkt A z dowolnym punktem na zewnętrznym okręgu tego koła. Najwyraźniej P3 rozumiano w taki sposób, który nie pozwalał na „odrywanie cyrkla” i przenoszenie ustalonej rozwartości. Wydaje się to zgodne z ograniczeniami czynności dozwolonych przy wykonywaniu konstrukcji, które, zgodnie z tradycją, wprowadzić miał Platon. Konstrukcja przeprowadzona w Z2 pokazuje, że nie jest to istotne ograniczenie.

Warto zaznaczyć, że w systemie Hilberta konstrukcje z tego i następnego zagadnienia są w zasadzie zastąpione aksjomatem (aksjomat C1 u Hartshorne’a, s. 82).

Z3

„odjąć prosta od prostej” — po polsku powiedziałoby się raczej „odłożyć prostą *na* prostej”. Przekład „odłożyć” zatarłby jednak arytmetyczny sens tej konstrukcji i prowadził do niezgodności z brzmieniem aksjomatu 3.

Z4

Całość sformułowania, zawierającego wiele zwrotów typowych dla *Elementów*, brzmi po grecku:
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

„odpowiednio” — *ἑκατέραν ἑκατέρᾳ*, dosłownie „każdy każdemu”, co po polsku byłoby mylące.
„podstawa” — jak wyjaśnia Proklos (236,12nn.), podstawa (*βάσις*) trójkąta to dla Euklidesa albo trzeci bok, jeśli o dwu była mowa wcześniej, albo bok leżący „na widoku”, jeśli żaden bok nie został wcześniej wyróżniony.
„kąt BAC” — *ἡ ὑπὸ* ΒΑΓ *γωνία*; pełny zwrot brzmiałby *ἡ ὑπὸ τῶν* ΒΑ, ΑΓ

περιεχομένη γωνία, czyli „kąt zawarty między prostymi BA, AC".

Fragment „Jeśli bowiem podstawa BC nie pokryje się z EF, mimo że B pokryło się z E, a C – z F, to dwie proste będą zawierały obszar; co jest niemożliwe. Podstawa BC pokryje się więc z BF" jest niemal na pewno interpolacją. Heiberg zauważył bowiem, że w tekście Al-Nairiziego fragment ten dopisany jest po kończących Z4 słowach „co należało wykazać". Jest to więc zapewne włączone do głównego tekstu scholium. Brzmienie interpolacji sugeruje, że pochodzi ona od tego samego autora co aksjomat 9.

*

Twierdzenie 4 wyraża (w przybliżeniu) tak zwaną cechę bkb (bok – kąt – bok) przystawania trójkątów. Kolejne cechy przystawania trójkątów pojawią się w twierdzeniach 8 (cecha bbb) i 26 (cechy kbk, kkb).

Metoda superpozycji. Godna uwagi jest metoda użyta w dowodzie. Jest to tak zwana metoda *superpozycji* bądź *nakładania* figur. Aby udowodnić tezę, Euklides chce „pokryć" trójkąt DEF trójkątem ABC, czyli, jak się wydaje, przesunąć trójkąt ABC (bez zmiany jego boków i kątów) do miejsca, w którym znajduje się trójkąt DEF, i nałożyć go na DEF.

Euklides posługuje się metodą superpozycji raczej niechętnie. W księdze I występuje ona jeszcze tylko raz, w dowodzie twierdzenia 8, choć można by jej użyć na przykład do podania zupełnie natychmiastowych dowodów twierdzeń 2 i 3. Heath sugeruje wręcz (s. 225), że Euklides stosuje superpozycję jedynie tam, gdzie nie potrafi tego uniknąć. To teza może nieco zbyt stanowcza — por. uwagi u Vitraca (ss. 298n.).

Niechęć Euklidesa do metody superpozycji nie jest zresztą bezpodstawna. Po pierwsze bowiem, metoda ta jest wyraźnie niezgodna z duchem platońskiej czy nawet arystotelesowskiej filozofii matematyki: przedmioty matematyczne to nie przedmioty fizyczne i nie można ich dowolnie „przesuwać". Po drugie, stosowanie superpozycji nie jest uzasadnione przez aksjomatykę *Elementów*: ani w postulatach, ani w aksjomatach nic się przecież nie mówi o możliwości przenoszenia figur z miejsca na miejsce bez ich zniekształcania.

Warto nadmienić, że system Hilberta omija trudność związaną z dowodem cechy bkb: jest ona przyjęta jako aksjomat. Okazuje się skądinąd, że taki sposób postępowania jest w pewnym sensie nieunikniony — por. obszerniejszą dyskusję tego zagadnienia u Hartshorne'a (ss. 33nn. i 148nn).

Z5

„równe proste" — chodzi oczywiście o ramiona trójkąta.
„weźmy dowolny punkt F" — Εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ.

Z6

„trójkąt DBC będzie równy trójkątowi ACB, czyli mniejszy większemu; co jest niedorzeczne" — typowy przykład (domniemanego) użycia Aksjomatu 8 (patrz komentarz do Aksjomatów).

Z7

Grecki tekst wyjątkowo trudnego w przekładzie sformułowania brzmi:
Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Przetłumaczenie go „słowo w słowo" jest niemożliwe chociażby z tego powodu, że samo *συνίστημι* znaczy „skonstruować tak, aby się zbiegały, tworząc trójkąt". Sens twierdzenia najlepiej objaśnia rysunek.

„Znacznie większy" – *πολλῷ μείζων*. Jeśli wiadomo, że x jest większe od y oraz y jest większe od z, Euklides pisze, iż x jest „znacznie większe" od z.

*

Heath uważa (s. 259), że greckie sformułowanie jest tak niejasne dlatego, że wykorzystuje skostniałe zwroty tradycyjne. Potwierdzeniem tej tezy może być fakt, iż podobne wyrażenie, zawierające te same terminy techniczne (np. *πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ*), pojawia się już u Arystotelesa w *Meteorologice* (376 a 2).

Euklides nie rozważa przypadku, w którym — przy oznaczeniach z dowodu — trójkąt ABD mieści się w całości wewnątrz trójkąta ABC (i oczywiście wszystkich przypadków symetrycznych). Dowód dla tego przypadku podaje Proklos (262,3nn.). Jest to typowa cecha *Elementów*: kiedy do rozpatrzenia jest kilka przypadków, Euklides zazwyczaj wybiera jeden, na ogół ten, który wydaje się najtrudniejszy. Pozostałe są ćwiczeniami dla czytelnika.

Z8

Twierdzenie 8 formułuje odpowiednik cechy bbb przystawania trójkątów. Podobnie jak w przypadku cechy bkb (Z4), dowód wykorzystuje „nielegalną" metodę superpozycji (patrz komentarz do Z4).

W systemie Hilberta cecha bbb przystawania trójkątów daje się już dowieść poprawnymi metodami w oparciu o wcześniejsze twierdzenia (przypomnijmy, że cecha bkb jest aksjomatem; Hartshorne, s. 99).

Z9

Zagadnienia 9-12 przedstawiają ciąg konstrukcji, w których znów, podobnie jak w Z1, potrzebny jest aksjomat o przecinaniu się okręgów (patrz komentarz do Z1). Jeśli jednak potraktować te konstrukcje jako twierdzenia egzystencjalne (Z9: dowolny kąt prostoliniowy ma dwusieczną, itd.), to okazuje się, że można je udowodnić bez tego aksjomatu (Hartshorne, s. 100n.).

Z11

„pod kątem prostym" — *πρὸς ὀρθὰς γωνίας*.
„połóżmy" — *κείσθω*. Euklides powołuje się w tym miejscu na konstrukcję z Z2.

Z12

„prosta prostopadła" — *κάθετος εὐθεῖα*.

*

W tym zagadnieniu, inaczej niż zwykle w *Elementach*, zakłada się, że dana prosta AB jest nieskończona (patrz komentarz do D4). W przeciwnym wypadku konstruowana prostopadła CH mogłaby nie przeciąć AB — nie byłaby więc prostopadłą w sensie Definicji 10.

Z13

„dodajmy wspólny" — *κοινὴ προσκείσθω*. Sens jest oczywiście taki: „dodajmy do obu stron".

*

Zastrzeżenie w sformułowaniu twierdzenia „Jeśli prosta stojąca na prostej tworzy kąty" objaśnia Proklos (292,12nn.). Kiedy dwie proste (czyli nasze odcinki) stykają się tylko końcami, to tworzą jeden kąt, a nie kąty — jest on wtedy oczywiście mniejszy od dwóch kątów prostych.

Z14

„odejmijmy wspólny" — *κοινὴ ἀφῃρήσθω*. Sens jest podobny jak w Z13: „odejmijmy od obu stron."

„można wykazać" — *δείξομεν*.

*

Sformułowanie — które w połączeniu z twierdzeniem 13 mogłoby sugerować, że każde dwie stykające się wierzchołkami proste leżą na wspólnej prostej — jest równie mylące w oryginale jak i w przekładzie.

Z15

„wierzchołkowe” — *κατὰ κορυφὴν*. Termin *κορυφή*, wierzchołek, nie jest definiowany.

Wniosek (*πόρισμα*) jest prawdopodobnie interpolacją. Mają go jednak Proklos, Psellos i marginalia niektórych kodeksów.

Z16

Twierdzenie 16 łatwo wynika z Twierdzenia 32, ale to z kolei wymaga postulatu o równoległych. Twierdzenie 16 należy natomiast do geometrii absolutnej.

Z17

„dowolnie wybrane” — *πάντῃ μεταλαμβανόμεναι*.

Z20

Proklos przekazuje, że epikurejczycy wyśmiewali to twierdzenie, mówiąc, iż nie wymaga ono dowodu, gdyż jest oczywiste nawet dla osła. Osioł bowiem, mogąc dojść do siana albo wzdłuż jednego boku trójkąta, albo wzdłuż dwu krótszych, wybiera tę pierwszą możliwość.

Sir Henry Savile powiada w swych oksfordzkich wykładach o *Elementach* (r. 1621), że autorzy powyższego wywodu byli *digni ipsi, qui cum asino foenum essent* (sami godni, by z osłem siano jeść).

Z21

Tekst grecki sformułowania wygląda następująco:
Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Z22

„trzy proste równe trzem danym” — w bardziej typowej dla *Elementów* stylistyce powinno być raczej „trzy proste równe *odpowiednio* trzem danym”.

„trzeba zatem” — *δεῖ δή*. Przyjmujemy tutaj tekst rękopisów, zamiast proponowanego przez Heiberga/Stamatisa *δεῖ δὲ*. Tego rodzaju zastrzeżenie określające warunki wykonalności konstrukcji albo prawdziwości twierdzenia nazywa się *διόρισμος* (tak samo jak uściślenie, jedna z części zagadnienia — patrz komentarz do Z1). Podobnego typu *διόρισμος* pojawia się w zagadnieniu 28 księgi VI.

„gdyż dwa (...) pozostałego boku” — fragment ten, nawiązujący do Twierdzenia 20, występuje we wszystkich rękopisach, nie ma go natomiast u Proklosa. Uważa się, że jest to prawdopodobnie glossa, zwłaszcza że analogicznej uwagi brak w VI.28.

*

Jak można zgadnąć, w tym zagadnieniu znów potrzebny byłby aksjomat o przecinaniu się okręgów (patrz komentarz do Z1).

Z23

Heath zauważa (s. 295), że konstrukcja wykorzystana w tym zagadnieniu różni się nieco od konstrukcji przeprowadzonej w poprzednim. Tam bowiem mamy tylko skonstruować trójkąt o bokach zadanej długości, nie dbając o jego umiejscowienie. Tu zaś chcemy, by jeden z boków ustalonej długości wylądował na danej z góry prostej AB.

W systemie Hilberta wykonalność tej konstrukcji gwarantuje aksjomat (C4 u Hartshorne’a, s. 90).

Z25

Grecki tekst oryginału jest doskonałym przykładem specyficznego, zwięzłego stylu Euklidesa:
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Z26

Twierdzenie dotyczy kolejnych cech przystawania trójkątów: kbk i kkb. W przeciwieństwie do poprzednich dowodów cech przystawania trójkątów (Z4 i Z8), obecny nie wykorzystuje już metody superpozycji.

Z27

To zagadnienie rozpoczyna drugą część pierwszej księgi *Elementów.* Pierwszych dwadzieścia sześć zagadnień dotyczy głownie trójkątów, zwłaszcza warunków ich przystawania. Najbliższych kilka poświęconych będzie natomiast teorii równoległych. W szczególności, zagadnienia 27 i 28 formułują trzy kryteria równoległości prostych.

Z29

Proste przedłużone nieskończenie z kątów mniejszych od dwu kątów prostych zbiegają się — *αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναιεἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν.*

*

Twierdzenie 29 — odwrotne do twierdzeń 27 i 28 — jest pierwszym, którego dowód wymaga postulatu 5.

Z30

W większości rękopisów w dowodzie tym brak jest większości podsumowania, podobnie jak w Z1.

Z31

Warto zauważyć, że konstrukcja przeprowadzona w tym zagadnieniu nie wymaga postulatu o równoległych: twierdzenie, że przez każdy dany punkt przechodzi równoległa do danej, należy do geometrii absolutnej.

Z postulatu piątego wynika natomiast jedyność konstruowanej równoległej (która to jedyność jest, jak odnotowuje Proklos (376,21nn.), oczywistym wnioskiem z twierdzenia 30).

Z32

Twierdzenie o sumie kątów w trójkącie — czyli druga część twierdzenia 32 — należało do najwcześniejszych odkryć matematyki greckiej; przypisywano je m. in. Talesowi. Wielu matematyków (bodaj najsłynniejszym wśród nich był Adrien Marie Legendre) próbowało natomiast udowodnić je niezależnie od postulatu o równoległych. Dziś wiemy, że ich próby były skazane na niepowodzenie: wśród geometrii nieeuklidesowych są zarówno takie, w których suma kątów wewnętrznych trójkąta jest większa od dwu kątów prostych, jak i takie, w których jest mniejsza.

Z33

Tekst sformułowania:
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.
nie jest zbyt jasny, ale sens twierdzenia jest oczywiście taki, że każdy czworokąt z parą boków równych i równoległych jest już równoległobokiem. Zastrzeżenie *ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη* podkreśla, że równe i równoległe są dwa pozostałe boki równoległoboku, a nie jego przekątne.

„a BC jest wspólne” — *κοινὴ δὲ ἡ* ΒΓ. Chodzi o to, że BC wystąpi po obu stronach równości, która zaraz zostanie sformułowana.

„dwie proste AB, BC są równe dwu prostym BC, CD” — Euklides, jak widać, nie zawsze dba o zwrot „odpowiednio” albo o kolejność liter (wypadałoby raczej napisać że AB, BC są „równe odpowiednio” DC, CB).

Z34

Ani „obszar równoległoboczny” (παραλληλόγραμμον χωρίον), ani „równoległobok” (samo παραλληλόγραμμον) nie zostały zdefiniowane — porównaj szczególnie D22 i komentarz do niej. Nietrudno jest jednak zgadnąć, że chodzi o obiekty, których istnienie gwarantuje Z33. Proklos podaje zresztą (392,20nn.), że to termin „równoległobok” wprowadzony został zapewne właśnie przez Euklidesa.

Z35

Przyjmuje się zwykle, że to zagadnienie rozpoczyna trzecią część pierwszej księgi *Elementów*, dotyczącą tematyki, którą można by nazwać „teorią pola”. Poprzednie zagadnienie było w pewnym sensie „przejściowe”.

Z37

„Połowy tego samego są zaś sobie równe.” — Heiberg/Stamatis wyłączają to zdanie z tekstu, sugerując, że jest to wczesna interpolacja, podobnie jak Aksjomat 6. Nam sprawa wydaje się jednak znacznie mniej jasna (patrz komentarz do aksjomatów). Analogiczna sytuacja ma miejsce w Z38.

*

Proklos (403,4nn.) przypomina w komentarzu do tego twierdzenia, że równość obszarów (pól) nie jest równoważna równości ich obwodów. Krytykuje przy tym geografów, który o rozmiarach miasta wnioskują z długości jego murów, i przytacza (w bardzo poważnym tonie — jako ostrzeżenie) anegdotę o oszustwach dokonywanych przy podziale ziemi. Niektórzy koloniści przydzielali sobie ziemię o większym obszarze, ale mniejszym obwodzie, niż pozostałym i zyskiwali w ten sposób, całkiem niesłusznie, reputację nadzwyczaj uczciwych.

Jak już była mowa wcześniej (komentarz do Aksjomatów), użyty w dowodzie Aksjomat 6, całkiem niezależnie od tego, czy jest autentyczny, *nie* wynika z pierwszych trzech aksjomatów (czyli tych „najpewniejszych”). Wynika natomiast (jeśli się ma do dyspozycji odpowiednio duży kawałek reszty aksjomatyki, rzecz jasna) z tak zwanego aksjomatu de Zolta, będącego w pewnym sensie współczesnym odpowiednikiem Aksjomatu 8. Aksjomat de Zolta głosi: jeśli figura X zawiera się w figurze Y, a figura Y\X ma niepuste wnętrze, to X i Y nie mają równej zawartości (pojęcie równej zawartości wprowadziliśmy w komentarzu do Aksjomatów; pojęcie „wnętrza” figury wymaga oczywiście definicji, ale jego intuicyjny sens jest raczej jasny).

Aksjomaty Hilberta (wraz z postulatem o równoległych, ale bez armat w rodzaju aksjomatu Dedekinda) implikują aksjomat de Zolta, ale nie jest znany czysto geometryczny dowód tego faktu. Skądinąd, twierdzenie

37 można udowodnić bez aksjomatu de Zolta. Wymagają go jednak niektóre spośród dalszych twierdzeń pierwszej księgi (twierdzenia 39, 40, 48).

Dokładniejsze omówienie tej problematyki zawierają rozdziały 22 i 23 książki Hartshorne'a.

Z39

W przekładzie wyłożenia tego dowodu odchodzimy od wydania Heiberga/Stamatisa, usuwając wstawki, które są, jak wykazał później sam Heiberg na podstawie papirusów, interpolacjami nieuważnego czytelnika.

Z40

Jak wykazał Heiberg w oparciu o fragment zachowany w papirusie, twierdzenie 40 jest w całości nieautentyczne (patrz np. Heath, s. 338).

Z42

„równoległobok z danym kątem" — παραλληλόγραμμον ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ, czyli dosłownie „w danym kącie".

Z43

„dopełnienia" — παραπληρώματα. Czym są „dopełnienia" i „równoległoboki wokół średnicy", wyjaśnia rysunek.
„średnica" — διάμετρος. Po polsku nazywałoby się to raczej „przekątną", ale termin jest ten sam co dla średnicy koła.

„niech EH, FG będą równoległobokami" — Euklides od tego miejsca często stosuje dwuliterowe oznaczenie dla określenia równoległoboku. Równoległoboki EH, FG to równoległoboki, których przekątnymi są EH, FG.

Z44

„przyłożyć" — παραβαλεῖν.

Zagadnienia 44 i 45 należą do najważniejszych w pierwszej księdze *Elementów*. Są one pierwszymi przykładami tak zwanego „przykładania obszarów" (παραβολὴ τῶν χωρίων). Zagadnienie przykładania obszarów polegało na tym, by mając dany odcinek i wielokąt, skonstruować równoległobok, którego jednym bokiem byłby dany odcinek i który byłby równy co do pola danemu wielokątowi. Dodatkowo można było żądać, by bok konstruowanego równoległoboku nie pokrywał się dokładnie z danym odcinkiem, lecz był odeń nieco dłuższy lub krótszy, przy czym „wystająca" poza dany odcinek część równoległoboku (lub, odpowiednio, część „brakująca") miała być podobna do jakiegoś innego, z góry danego równoległoboku (przykładania obszarów w tak ogólnej postaci dotyczą zagadnienia 28 i 29 księgi VI). Przykładanie obszarów było geometrycznym odpowiednikiem rozwiązywania równań kwadratowych.

W zagadnieniu 44 sytuacja jest trochę prostsza: dany jest trójkąt, odcinek i kąt, należy skonstruować równoległobok o tym samym polu co dany trójkąt, o boku równym danemu odcinkowi i o jednym z kątów wewnętrznych równym danemu kątowi. Istotna różnica w porównaniu z wcześniejszym zagadnieniem 42 polega na tym, że ustalony jest nie tylko kąt, ale i długość boku: potrafimy więc już na przykład konstruować równy co do pola danej figurze prostokąt o boku jednostkowej długości.

Z45

„figura prostoliniowa” — *εὐθύγραμμον* (bez *σχῆμα*).

*

Jak widać, choć twierdzenie 45 dotyczy dowolnych figur prostoliniowych, Euklides dowodzi go tylko dla czworokątów, inne przypadki pozostawiając czytelnikowi. Dowód w przypadku ogólnym jest zresztą taki sam jak dla czworokątów, trzeba jednak wiedzieć, że każdą figurę prostoliniową można rozłożyć na sumę trójkątów (o czym Euklides nie wspomina).

Zauważmy, że z dowodu wynika, że nie tylko kąt, ale jeden z boków konstruowanego równoległoboku może być ustalony. Tak więc, dla dowolnego danego wielokąta potrafimy np. skonstruować równy mu co do pola prostokąt o boku dowolnej żądanej długości. Da się nawet osiągnąć więcej: mając dany wielokąt, można skonstruować równy mu co do pola kwadrat (kwadratura wielokąta). Tego jednak Euklides dowodzi dopiero w zagadnieniu 14 księgi II.

Z47

„Dwukrotności równych są zaś sobie równe”. Heiberg, który uważał Aksjomat 5 za interpolowany, proponował wyrzucić ten fragment z tekstu (por. podobną sytuację w Z37 i Z38).

*

Twierdzenie to zwane jest, jak powszechnie wiadomo, twierdzeniem Pitagorasa. Problem, kto rzeczywiście jest jego autorem, jest trudny i jego omawianie wykraczałoby poza ramy niniejszego komentarza.

Warto zwrócić uwagę, że najczęściej spotykany, szkolny dowód twierdzenia Pitagorasa używa teorii podobieństwa figur, która u Euklidesa pojawia się dopiero w księdze VI. Dowód twierdzenia podany w *Elementach* wyróżnia się spośród wielu znanych starożytnym szczególną urodą.

Z48

To oczywiście twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.