# Zadania różne — co robić na zajęciach ze studentami

Będę mówić o nauczaniu matematyki. Zacznę od zadania z II stopnia bieżącej OM. Najłatwiejszego.

*We wnętrzu trójkąta o bokach długości* $3, 4, 5$ *leży punkt* $P$. *Wykazać, że jeżeli odległości* $P$ *od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości* $P$ *od boków też.*

*Rozwiązanie*

Trójkąt można umieścić w prostokątnym układzie współrzędnych tak, by jego wierzchołkami były punkty $A = (4, 0)$, $B = (0, 3)$ i $C = (0, 0)$ (bo jest prostokątny, gdyż $3^2 + 4^2 = 5^2$). Niech $P = (x, y)$. Odległość punktu $P$ od wierzchołka $A$ jest równa $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, a ponieważ jest to liczba wymierna, więc również liczba $(x-4)^2+y^2$ jest wymierna. Wymierne są też liczby $x^2+(y-3)^2$ oraz $x^2+y^2$, jako kwadraty odległości od wierzchołków $B$ i $C$. Ponieważ różnica liczb wymiernych jest wymierna, więc wymierne są też liczby $x^2+y^2-\big((x-4)^2+y^2\big) = 8x-16$ i $x^2+y^2-\big(x^2+(y-3)^2\big) = 6y-9$, więc również liczby $x$ i $y$, czyli odległości od boków $BC$ i $AC$. Równanie prostej $AB$ wygląda tak: $3x+4y-12 = 0$. Odległość punktu $P$ od boku $AB$ jest równa $\frac{|3x+4y-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x+4y-12|}{5}$, więc też jest liczbą wymierną (jako iloraz liczb wymiernych). $\square$

No i co tu się może zdarzyć? Niby nic większość rozwiązała poprawnie tak, jak przewidywała komisja układająca zadania. Jednak jeden z uczestników OM w Warszawie udowodnił (poprawnie) trochę inne twierdzenie:

*We wnętrzu trójkąta o bokach długości* $3, 4, 5$ *leży punkt* $P$. *Wykazać, że jeżeli odległości* $P$ *od wierzchołków są wszystkie postaci* $\frac{a}{10^k}$, *gdzie* $a, k$ *są liczbami naturalnymi, to odległości* $P$ *od boków też są liczbami tej postaci.*

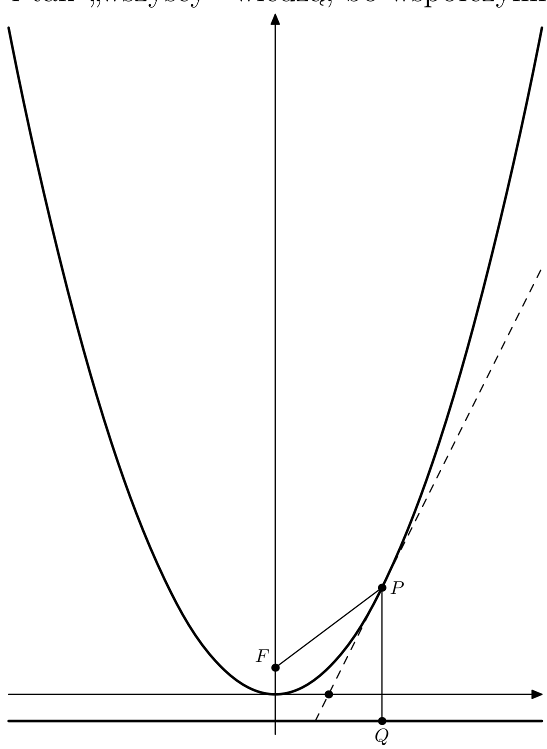
Wynika to ze sposobu mówienia o liczbach niewymiernych w polskiej szkole. Są one definiowane przez rozwinięcia dziesiętne. Oczywiście uczeń powinien zrozumieć definicję, ale jakoś nie pojął jej, a to osoba, która startuje w OM i co więcej jest uczniem II klasy LO im. Staszica w W–wie. Są to dosyć opłakane skutki udziwniania na potrzeby szkoły różnych definicji i twierdzeń. W tym wypadku szło o to, że kiedyś postanowiono, że do szkół podstawowych wprowadzone zostanie twierdzenie Pitagorasa, więc trzeba też będzie tam wprowadzić liczby niewymierne, jednak bez dowodu niewymierności choćby $\sqrt{2}$, który został uznany za zbyt trudny dla uczniów podstawówek. Uważam to za błąd. Można o liczbach niewymiernych w szkole podstawowej nie mówić wcale, nawet jeśli z jakichś przyczyn trzeba tam lub może w gimnazjum mówić o tw. Pitagorasa. W końcu dla większości ludzi niewymierność jakiejkolwiek liczby jest bez znaczenia. Znaczenie ma głównie to, że potrafimy dowieść, że pewne liczby są niewymierne, a dla uczniów zrozumienie tego rozumowania. Sama informacja, że liczba jest niewymierna jest zapewne niezrozumiała (część może być przekonana o tym, że za pomocą jakichś większych komputerów w końcu znajdzie się „*dokładne*" rozwinięcie dziesiętne np. $\sqrt{2}$). Główny powód, dla którego o niewymierności mówić warto, to właśnie dowód: na ogół pierwszy w życiu młodego człowieka ścisły dowód nieistnienia czegoś.

Tego rodzaju dziwnych rzeczy w szkołach jest więcej. Spotykam studentów, którzy oczywiście mieli w szkole symbole Newtona (kombinatoryka zwana czasem rachunkiem prawdopodobieństwa), ale nie widzieli dwumianu Newtona a czasem nawet trójkąta Pascala. To moim zdaniem znów jest szkodliwe, bo nie pokazano im pewnej całości a tylko wybrany fragment. Oczywiście to niczemu formalnie nie szkodzi, bo do osiągnięcia dobrego wyniku na maturze nie trzeba rozwiązywać zadań, które wymagają skojarzenia różnych rzeczy, choć ostatnio pojawiają się zadania „normalne" zamiast czysto testowych i jeśli ten kierunek drobnych zmian zostanie utrzymany, to po kilku latach może być trochę lepiej. Jednak zmiany muszą być powolne, by nie denerwowały zbytnio zbyt dużej grupy ludzi nierozumiejących z matematyki nic a często również w ogóle nic (to większość każdego społeczeństwa).

Zdarzenie z piątku 27 lutego 2016 r. Prowadząc ćwiczenia z matematyki dla studentów chemii zażądałem sprowadzenia trójmianu kwadratowego do postaci kanonicznej, bo mieliśmy scałkować funkcję $\frac{1}{x^2+x+1}$, a wiedzieliśmy, że $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$. Okazało się, że nikt nie wie, o czym mówię. Śledztwo wykazało, że nikt spośród 16 studentów obecnych w sali nie widział (a co najmniej nie pamięta takiego zdarzenia) wyprowadzenia wzoru na pierwiastki równania kwadratowego. Oni są na ogół po klasach biologiczno–chemicznych. W szkole używane jest słowo *parabola,* ale definicji tego tworu tam nie ma. W podręcznikach można spotkać zdania w rodzaju *wykres funkcji kwadratowej jest parabolą,* co uczeń zapewne traktuje jako definicję paraboli. Autorzy bronią się twierdząc, że przecież to nie jest definicja paraboli. Wszystko jest niby w porządku, ale wedle szkolnej terminologii terminologii zbiór dany równaniem $x - y^2$ nie jest wykresem funkcji, zatem nie jest też parabolą. Z jakichś przyczyn, których nie znam, nie można napisać w podręczniku, że parabola to zbiór przystający do wykresu funkcji kwadratowej. Przy okazji omawiania równań kwadratowych z parametrem można w szkole podać geometryczną definicję paraboli: *parabola to zbiór złożony z punktów płaszczyzny równoodległych do danej prostej zwanej kierownicą i i danego punktu tej płaszczyzny nieleżącego na kierownicy, zwanego ogniskiem paraboli.* Przelicza się to bardzo prosto. Niektórzy nauczyciele twierdzą, że to robią w konkretnych przypadkach. Jednak następne w kolejności powinno być zadanie o zwierciadle parabolicznym, a ostatnio opowiadałem coś członkom Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki i okazało się, że to dla nich nowość zwłaszcza dowód. Wyglądało to jakoś tak:

A teraz coś o stycznej do paraboli. Styczną do paraboli w punkcie $P$ można zdefiniować jako prostą przechodzącą przez $P$ nierównoległą do osi symetrii paraboli — nie jest to najlepsze postępowanie, ale jest poprawne i naturalne w kontekście definicji stycznej do okręgu.

Załóżmy, że $P = (p, ap^2)$. Udowodnimy, że styczna jest dwusieczną kąta zawartego między prostą $PF$ i prostą o równaniu $x = p$, czyli pionową przechodzącą przez $P$. Zaczniemy od znalezienia równania owej stycznej. Ponieważ ma ona być niepionowa, więc równanie będzie postaci $y = \gamma x + \beta$. Z definicji wynika od razu, że układ równań $\begin{cases} y = \gamma x + \beta \\ y = ax^2 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = p$, $y = ap^2$. Dokładnie jedno rozwiązanie ma więc też równanie kwadratowe $ax^2 = \gamma x + \beta$, zatem $\gamma^2 + 4a\beta = 0$ i oczywiście $ap^2 = \gamma p + \beta$, więc $0 = \gamma^2 + 4a(ap^2 - \gamma p) = (2ap - \gamma)^2$. Czyli $\gamma = 2ap$ (co i tak „wszyscy" wiedzą, bo współczynnik kierunkowy stycznej to pochodna).




na rysunku obok znajduje się parabola o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2$. Jej ognisko to punkt $F = (0, \frac{1}{2})$, kierownica ma równanie $y = -\frac{1}{2}$.

Równanie stycznej do paraboli w punkcie $P = (p, ap^2)$ wygląda wobec tego tak: $y = 2apx - ap^2$. Prosta pionowa przechodząca przez $P$ przecina prostą o równaniu $y = -\frac{1}{4a}$ w punkcie $Q = (p, -\frac{1}{4a})$. Aby wykazać, że styczna jest dwusieczną kąta $\sphericalangle FPQ$ należy wykazać, że przechodzi ona przez środek odcinka $FQ$ — wiemy przecież, że $FP = PQ$. Środek to punkt $(\frac{p}{2}, 0)$, więc oczywiście leży na prostej $y = 2apx - ap^2$. $\square$

Co prawda nie było rysunku, bo myślałem przed odczytem, że słuchacze–nauczyciele to wiedzą ...

Mówię o tym, bo być może w czasie jakichś ćwiczeń wszystko jedno z jakiego przedmiotu, należy jakieś takie lub podobne zadania zaproponować studentom do rozwiązania.

Dla wielu z nich to, co się dzieje na zajęciach jest zaskoczeniem. To jest niestety fakt, na który wpływu wielkiego nie mamy odkąd w szkołach faktycznie zrezygnowano z dowodów. Trzeba więc na początku studiów powoli przyzwyczajać studentów do tego, że twierdzenia wymagają dowodów, a nie np. sprawdzenia w trzech przypadkach, że wypowiadać się trzeba precyzyjnie. Nie jest to łatwe dla nich po na ogół 12 latach bełkotania.

Wtorek między 14:15 i 16:00. Studenci matematyki mieli narysować wykres funkcji $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ była kartkówka kilkanaście minut. Nikt nie dał rady zrobić tego w pełni i poprzeć poprawnymi obliczeniami. Głównie z powodu głupiego podejścia do obliczeń. Trzeba więc uczyć ich np. analizy matematycznej i jednocześnie przekształcania wyrażeń algebraicznych.

Inny problem. Coś mówiliśmy o zbiorze Cantora, bo chciałem aby zdefiniowali taką funkcję $f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, że obrazem każdego przedziału jest cała prosta. Po opisaniu zbioru Cantora zapytałem, czy w nim są jeszcze jakieś punkty poza końcami usuwanych przedziałów otwartych. W pierwszej chwili uznali, że nie ma — oni równolegle mają wstęp do matematyki i teoretycznie wiedzą, że zbiór ciągów zero–jedynkowych nie jest przeliczalny, ale to zaczęło przeszkadzać kilku osobom dopiero po chwili. Poprosiłem o przykład liczby ze zbioru Cantora, która nie jest końcem żadnego z wyrzucanych przedziałów. Podali, co prawda nie natychmiast, ale jednak po niewielu minutach.

Dużym problemem na I roku jest pojęcie granicy, a zwłaszcza jego „przypadek szczególny" — suma szeregu nieskończonego. Ilustracja.
22 lutego było kolokwium poprawkowe z AMI.1, na którym pojawiło się zadanie;
Zbadać zbieżność i, jeśli to możliwe, wyznaczyć granicę ciągu $(a_n)$, jeśli

$$a_n = \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k}\,.$$

Oceniałem to zadanie. Było 25 zer, 3 jedynki, jedna szóstka i po jednej ósemce, dziewiątce i dziesiątce, a 14 osób w ogóle nie próbowało go rozwiązać, a w każdym razie nie oddało kartki z tym zadaniem. Na ćwiczeniach wcześniej widzieli, że $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$. Oznacza to, że w ciągu semestru nie nauczyliśmy ich, że $n^3 \gg n^2$ — wśród poprawkowiczów były osoby poprawiające stopień pozytywny na wyższy. Z drugiej strony w poprawnych rozwiązaniach widać było, że jednak niektórzy studenci pamiętają o wspomnianej nierówności i potrafią jej użyć — potrafili zauważyć, że z grubsza $\log_2 n$ takich grup mieści się między $n^2$ i $n^3$. To cieszy, ale jednocześnie nie sposób pominąć, że studenci dowiedzieli się na zajęciach, że istnieje stała Eulera (zatrudnianego w Petersburgu przez Katarzynę II, zwaną poza Polską Wielką): $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)$, co pozwoliłoby na przybliżenie wyrazu badanego ciągu przez $\gamma+\ln n^3-(\gamma+\ln n^2)=\ln n$.

Nikt tak nie dowodził równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, co jest w jakimś sensie przykładem klęski nauczania, tym razem między innymi mojego.

Warto czasem wyjaśniać, jeśli to możliwe, skąd biorą się różne pomysły. Oto przykład. Rozwiązujemy równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach (lub różnicowe o stałych współczynnikach), to pomysł, że funkcja wykładnicza spełnia je, jeśli wykładnik jest pierwiastkiem równania charakterystycznego pomnożonym przez zmienną. A co jeśli krotność niektórych pierwiastków jest większa od 1? Otóż ten przypadek to przypadek graniczny: dwa pierwiastki złały się w jeden. Funkcje $e^{\lambda_1 x}$ i $e^{\lambda_2 x}$ spełniają równanie, więc również funkcja $\frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - gl_1}$ też je spełnia i pochodna $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)$ w punkcie $x = 0$ równa jest 1. Mamy też $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(e^{\lambda x}\right) = xe^{\lambda x}$. To jest uzasadnienie dokładne! Z twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań od parametrów, warunków początkowych. Ale nawet gdyby nie było to i tak otrzymaliśmy jakiś wzór i wystarczyłoby sprawdzić, że otrzymana funkcja jest rozwiązaniem. To oczywiście nie mój pomysł tylko Eulera. Rozumowanie znajduje się w co najmniej jednym podręczniku wydanym (napisanym) w XX wieku — w książce W.I. Arnolda, przeznaczonej dla studentów Uniwersytetu Moskiewskiego, a tam była bardzo ostra konkurencja, więc studenci byli naprawdę bardzo sprawni umysłowo.

A teraz słów kilka o rozmaitościach, oczywiście zanurzonych w przestrzeni euklidesowej. Dawno temu na I roku matematyki był wykład z geometrii analitycznej i w jego ramach znajdował się czas na omówienie przestrzeni rzutowych (rzeczywistych i zespolonych). Teraz już tego czasu nie ma. Jednak na II roku trudno nie wspomnieć o rozmaitościach, bo to przecież język do twierdzenia o funkcjach uwikłanych (później okazuje się, że nie tylko). Oczywiście każdy mówi o sferze (ogólniej o poziomice funkcji rzeczywistej lub funkcji o wartościach w przestrzeni niższego wymiaru). Jest tu bardzo naturalne miejsce do pokazania płaszczyzny rzutowej i butelki Kleina. Naturalne spojrzenie na płaszczyznę rzutową polega na tym że dodajemy do płaszczyzny euklidesowej „kierunki" i one pełnią rolę punktów w nieskończoności. Geometrycznie realizujemy to wybierając w $\mathbb{R}^3$ punkt poza płaszczyzną i prowadząc przez niego wszystkie proste. Utożsamiamy te proste z punktami płaszczyzny, w których przebijają one płaszczyznę. Równoległe do płaszczyzny stają się punktami w nieskończoności

Potrzebne będzie przekształcenie z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$, które będzie przekształcać różnowartościowo proste przechodzące przez ustalony punkt - w dalszym ciągu będzie to punkt $(0, 0, 0)$ w przestrzeń $\mathbb{R}^4$. Prostą można utożsamić z parą punktów, w których przebija ona sferę jednostkową. Ma więc ono być prawie różnowartościowe na sferze jednostkowej: każda para punktów antypodycznych trafić ma w jeden punkt, ale różne pary mają trafić w różne punkty. Zapachniało wielomianami kwadratowymi jednorodnymi jako najprostszymi, które sklejają punkty antypodyczne. Mowa o kombinacjach liniowych funkcji $x^2$, $y^2$, $z^2$, $xy$, $xz$ i $yz$. Mamy więc odwzorowanie w $\mathbb{R}^6$:

$$(x,y,z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz).$$

Jednak to ogromna rozrzutność. Ogólne twierdzenia mówią, że wymiar jest za wysoki, bo powinno się dać włożyć przestrzeń w $\mathbb{R}^4$. Jasne jest, że z jednego kwadratu można zrezygnować od razu, bo interesuje nas obraz sfery jednostkowej. Ale można rozważyć przekształcenie zdefiniowane wzorem $F(x,y,z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2)$ dla dowolnych liczb $x, y, z \in \mathbb{R}$ (D.Hilbert, S.Cohn–Vossen „Geometria poglądowa", PWN 1956, Springer 1932, po angielsku „Geometry and the Imagination", Chelsea Publishing Company, 1952, na rosyjski przełożono ją w 1936 r.). Kluczowy jest minus.

Jeśli $F(x,y,z) = F(u,v,w)$, to $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$ oraz $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4(xy)^2 = (u^2-v^2)^2 + 4(uv)^2 = (u^2+v^2)^2$, zatem $x^2+y^2 = u^2+v^2$ i wobec tego $x^2 = u^2$ i $y^2 = v^2$. Jeśli $x = y = 0$, to musi też być $u = v = 0$. Mamy $F(0,0,z) = (0,0,0,0)$. Załóżmy teraz, że przynajmniej jedna z liczb $x, y$ jest różna od 0, np. $x \neq 0$. Ponieważ $x^2 = u^2$, więc również $u \neq 0$, dokładniej $u = x$ albo $u = -x$. W pierwszym przypadku z równości $xy = uv$ i $xz = uw$ wynikają równości $y = v$ i $z = w$. W drugim analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że $y = -v$ i $z = -w$. Wykazaliśmy więc, że jeśli $(x,y) \neq (0,0)$, to

$$F(x,y,z) = F(u,v,w) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (u,v,w) \;\text{ lub }\; (x,y,z) = -(u,v,w).$$

Zajmiemy się teraz różniczką przekształcenia $F$. Mamy $DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ 2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$.

Widać od razu, że rząd $DF(0,0,0) = 0$. Jeśli $x = y = 0 \neq z$, to rząd $DF(0,0,z)$ jest równy 2, jądrem przekształcenia $DF(0,0,z)$ jest w tym przypadku oś $z$. Jeśli $(x,y) \neq (0,0)$, to rząd przekształcenia $DF(x,y,z)$ jest równy 3.

**Przykład 3.** *płaszczyzna rzutowa*

Niech $M = F(S^2)$, przypominamy $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ to sfera o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu 1. Wykażemy, że $M$ jest rozmaitością dwuwymiarową.

◀ Zanim to zrobimy, opiszemy ten zbiór nieco dokładniej. Przekształcenie $F$ nie jest różnowartościowym przekształceniem sfery: odwzorowuje w jeden punkt dowolne dwa punkty antypodyczne. Parę punktów antypodycznych możemy utożsamić z prostą przechodzącą przez punkt $\mathbf{0}$. Można więc uważać, że $F$ przekształca proste przechodzące przez początek układu współrzędnych w punkty przestrzeni czterowymiarowej, przy czym na zbiorze tych prostych $F$ jest różnowartościowe (jeśli $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^2$ i $F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{q})$, to $\mathbf{p} = \pm\mathbf{q}$). Jest ono też ciągłe w następującym znaczeniu: proste tworzące kąt bliski 0 przechodzą na punkty leżące w niedużej odległości. Można więc uznać, że dzięki przekształceniu $F$ nadajemy zbiorowi prostych przechodzących przez punkt $\mathbf{0}$ strukturę rozmaitości dwuwymiarowej. Zbiór prostych przechodzących przez punkt $\mathbf{0}$ stanowi model płaszczyzny rzutowej: chodzi o to, by dodać do płaszczyzny „punkty w nieskończoności" tak, by w nich przecinały się proste równoległe. Można to uczynić np. w sposób, który opiszemy za chwilę. Załóżmy, że „naszym światem" jest płaszczyzna $z = 1$. Przez każdy punkt tej płaszczyzny prowadzimy prostą przechodzącą również przez $\mathbf{0}$. Punktami „nowej" płaszczyzny, tzw. płaszczyzny rzutowej, będą właśnie te proste. Jeśli jakieś punkty leżą na jednej proste zawartej w płaszczyźnie $z = 1$, to odpowiadające im proste leżą w jednej płaszczyźnie zawierającej punkt $\mathbf{0}$. Jasne jest, że pominęliśmy z niewiadomych przyczyn proste równoległe do płaszczyzny $z = 1$ przechodzące przez punkt $\mathbf{0}$. No to je dodajemy. Płaszczyzny przechodzące przez punkt $\mathbf{0}$ odpowiadają prostym na płaszczyźnie $z = 1$, płaszczyzna równoległa do płaszczyzny $z = 1$ to tzw. „prosta niewłaściwa" lub „prosta w nieskończoności". Teraz każde dwie „proste" przecinają się w dokładnie jednym „punkcie", tzn. każde dwie płaszczyzny przechodzące przez punkt $\mathbf{0}$ mają wspólną prostą przechodzącą przez $\mathbf{0}$. Jeśli te dwie płaszczyzny odpowiadają prostym równoległym na płaszczyźnie $z = 1$ (czyli zawierają je), to prosta wzdłuż, której się przecinają jest równoległa do płaszczyzny $z = 1$, czyli jest „punktem w nieskończoności". Tak określona płaszczyzna rzutowa jest interesującym obiektem geometrycznym, rozpatrywane są również przestrzenie rzutowe wyższych wymiarów. Zaczęto ich używać w związku z badaniem różnych rzutów, nie tylko prostopadłych, nie tylko równoległych, również środkowych. Ten obiekt okazał się przydatny w matematyce, nie tylko w geometrii rzutowej, ale to za długa opowieść na analizę drugą.▶

Wróćmy do dowodu tego, że $M$ jest rozmaitością. Niech $\psi\colon V \longrightarrow S^2$ będzie parametryzacją zbioru $U$ otwartego w przestrzeni metrycznej $S^2$. Załóżmy jeszcze, że zbiór $U = \psi(V)$ jest zawarty w pewnej półsferze otwartej $\Sigma$. Wtedy przekształcenie $F$ jest różnowartościowe na $\Sigma \supset U$. Wobec tego przekształcenie $F \circ \psi$ jest kandydatem na parametryzację pewnego podzbioru przestrzeni $M$. Oczywiście $M = F(\overline{\Sigma})$. Jest też jasne, że zbiory $F(U)$ i $F(\overline{\Sigma} \setminus U)$ są rozłączne. Ten drugi jest zwarty jako obraz ciągły zbioru zwartego, więc ten pierwszy $F(U)$ jest otwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej $F\left(\overline{\Sigma}\right) = M$. Wykazaliśmy właśnie, że $F$ przekształca otwarte podzbiory $\Sigma$ na otwarte podzbiory $M$. Stąd wynika, że $F\circ\psi$ przekształca otwarte podzbiory zbioru $V$ na otwarte podzbiory przestrzeni metrycznej $M$, a ponieważ jest przekształceniem różnowartościowym i ciągłym, więc jest homeomorfizmem. $D\psi(\mathbf{q})$ jest różnowartościowe dla każdego

$\mathbf{q} \in V$, bo $\psi$ jest parametryzacją. Zbiór $D\psi(\mathbf{q})(\mathbb{R}^2)$ jest przestrzenią styczną do sfery $S^2$ w punkcie $\mathbf{p} = \psi(\mathbf{q})$. Na $T_{\mathbf{p}}S^2$ przekształcenie $DF(\mathbf{p})$ jest różnowartościowe: jest to oczywiste jeśli $\mathbf{p} \neq (0,0,\pm 1)$; w tych dwóch punktach też tak jest, bo w nich przestrzeń styczna jest pozioma, więc jedynym punktem jądra $DF(\mathbf{p})$ w niej leżącym jest punkt $\mathbf{0}$. Ponieważ otwartymi półsferami można pokryć całą sferę (wystarczy ich 6), więc wskazaliśmy mapę w otoczeniu dowolnego punktu $\mathbf{x} \in M$ i zakończyliśmy dowód.

Na zakończenie rozważmy jeszcze obraz $F(A)$ zbioru

$$A = \big\{(x,y,z) \in S^2 : \quad y \geq 0,\ |z| \leq \tfrac{1}{2}\big\}.$$

Jasne jest, że jedyne pary punktów antypodycznych w zbiorze $A$ leżą w płaszczyźnie $y=0$. Są to pary punktów postaci $(\sqrt{1-z^2},0,z)$ i $(-\sqrt{1-z^2},0,z)$. Można wyobrazić sobie, że $A$ to połowa pasa między zwrotnikami. Przekształcenie $F$ „skleja” części „południków” ograniczające ten półpas ze zmianą orientacji, np. punkt $\big(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\big)$ jest sklejany z punktem $\big(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2}\big)$, a punkt $\big(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2}\big)$ — z punktem $\big(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\big)$. Zbiór powstały przez takie sklejenie nazywany jest wstęgą Möbiusa. Wykazaliśmy, że płaszczyzna rzutowa zawiera wstęgę Möbiusa. Aby uzyskać resztę płaszczyzny rzutowej należy do otrzymanej wstęgi Möbiusa dołączyć zbiór $F(B)$, gdzie

$$B = \{(x,y,z) \in S^2 : \quad z > \tfrac{1}{2}\}.$$

Można więc uznać, że płaszczyznę rzutową otrzymujemy sklejając brzegami wstęgę Möbiusa $(F(A))$ z „kołem” $(F(\overline{B}))$. Topologowie mówią czasem, że płaszczyzna rzutowa, to sfera z dziurą $(F(\overline{B}))$, którą to dziurę zaklejono wstęgą Möbiusa $(F(A))$. ■

**Przykład 4.** (*butelka Kleina*)
Niech $T^2$ oznacza dwuwymiarowy torus opisany wcześniej. Niech $K = F(T^2)$. Wykażemy, że zbiór $K$ jest rozmaitością. Jest ona nazywana butelką Kleina.

Niech $\psi$ oznacza przekształcenie rozważane w przykładzie 2, w którym opisaliśmy torus. Niech $\Phi = F \circ \psi$. $R$ niech oznacza kwadrat otwarty o boku $\pi$. Zbiór $\psi(R)$ nie zawiera ani jednej pary punktów antypodycznych, zatem przekształcenie $F$ jest na nim różnowartościowe, zatem $\Phi$ jest różnowartościowe na $R$. Różniczka $DF(\mathbf{p})$ jest różnowartościowa w każdym punkcie torusa $T^2$, bo nie zawiera on ani jednego punktu osi $z$. Stąd wynika, że przekształcenie $\Phi = F \circ \psi$ jest różnowartościowe, jest klasy $C^\infty$. Wykażemy, że jest ono homeomorfizmem. Jeśli $Q \supseteq R$ jest jakimkolwiek kwadratem o boku $2\pi$ a $U \subseteq R$ dowolnym zbiorem otwartym, to zbiory $\Phi(U)$ i $\Phi\big(\overline{Q} \setminus U\big)$ są rozłączne, ich sumą jest $K$, drugi z nich jest zwarty jako ciągły obraz zbioru zwartego. Wynika stąd, że zbiór $\Phi(U)$ jest otwarty w $K$. Wynika stąd, że przekształcenie $\Phi$ jest homeomorfizmem zbioru $R$ na zbiór $\Phi(R)$. Jasne jest, że dobierając $R$ do punktu $\mathbf{p} \in K$ możemy sparametryzować otoczenie danego punktu $\mathbf{p}$. Wykazaliśmy więc, że $K$ jest dwuwymiarową rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^4$.

Podobnie jak w przypadku płaszczyzny rzutowej spróbujemy coś powiedzieć o sposobie patrzenia na butelkę Kleina.

Niech $A = \{(\alpha,\beta)\colon \quad \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}, 0 \le \beta \le \pi\}$, $B = \{(\alpha,\beta)\colon \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \beta \le \pi\}$. Łatwo można zauważyć, że $\Phi(A)) \cup \Phi(B) = K$, że zbiór $\psi(A) \cap \psi(B)$ jest sumą dwóch rozłącznych półokręgów o końcach $\psi\big(\frac{\pi}{2}, 0\big) = (2,0,1)$, $\psi\big(\frac{\pi}{2},\pi\big) = (-2,0,1)$ i $\psi\big(\frac{3\pi}{2},0\big) = (2,0,-1)$, $\psi\big(\frac{3\pi}{2},\pi\big) = (-2,0,-1)$. Widoczne jest też, że zbiór $\Phi(A) = F(\psi(A))$ jest wstęgą Möbiusa. To samo dotyczy zbioru $\Phi(B)$. Te dwie wstęgi Möbiusa są „sklejone" brzegami.

Można też spojrzeć na to trochę inaczej. „Sklejamy" brzegi półtorusa (dwa okręgi) ze zmianą orientacji i w wyniku tego otrzymujemy butelkę Kleina.

Można jeszcze inaczej. Zdefiniujemy nowy zbiór:

$$C = \{(\alpha,\beta)\colon \quad |\alpha - \tfrac{\pi}{2}| < \tfrac{\pi}{6}, 0 \le \beta \le \pi\} \cup \{(\alpha,\beta)\colon \quad |\alpha - \tfrac{3\pi}{2}| < \tfrac{\pi}{6}, 0 \le \beta \le \pi\}.$$

Niech $C_B = \{(\alpha,\beta)\colon \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \beta \le \pi\} \cup \{(\alpha,\beta)\colon \quad \frac{5\pi}{3} \le \alpha \le 2\pi, 0 \le \beta \le \pi\}$ oraz $C_A = \{(\alpha,\beta)\colon \quad |\alpha - \pi| < \frac{\pi}{3}, 0 \le \beta \le \pi\}$. Bez specjalnych trudności można stwierdzić, że $\Phi(C_A)$ jest wstęgą Möbiusa, trochę „węższą" niż $\Phi(A)$. To samo jest prawdą w przypadku $\Phi(C_B)$. Zajmiemy się teraz zbiorem $\Phi(C)$. Zdefiniujemy przekształcenie $h\colon \Phi(C) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ w następujący sposób[1]: $\quad h\big(\Phi(\alpha,\beta)\big) =$

$$= h\Big((2+\cos\alpha)\big[(2+\cos\alpha)\sin\beta\cos\beta,\ \sin\alpha\sin\beta, \sin\alpha\cos\beta,\ (2+\cos\alpha)\cos 2\beta\big]\Big) =$$

$$= \begin{cases} (2+\cos\alpha)\big(\cos\beta, \sin\beta\big), & \text{gdy } \ (\alpha,\beta) \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \times (0,\pi); \\ (2+\cos(2\pi-\alpha))\big(\cos(\beta+\pi), \sin(\beta+\pi)\big), & \text{gdy } \ (\alpha,\beta) \in (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}) \times (0,\pi). \end{cases}$$

Pozostawiamy czytelnikom sprawdzenie, że $h$ jest ciągłe i różnowartościowe. Ponieważ interesujący nas zbiór $\Phi(C)$ jest zwarty, więc $h$ jest homeomorfizmem (na obraz). Wynika stąd, że zbiór $\Phi(C)$ jest homeomorficzny ze pierścieniem kołowym, czyli ze sferą z dwiema dziurami (kołowymi). Wystarczy każdą z tych dwu dziur zakleić wstęgą Möbiusa, by otrzymać butelkę Kleina, która z pewnych przyczyn nie nadaje się do noszenia piwa ani nawet mleka. Z jakich? ■

[1] $\Phi(\alpha,\beta) = \big((2+\cos\alpha)^2\sin\beta\cos\beta, (2+\cos\alpha)\sin\alpha\sin\beta, (2+\cos\alpha)\sin\alpha\cos\beta, (2+\cos\alpha)^2\cos 2\beta\big) = (2+\cos\alpha)(\dots)$