Wyjątki

Co jest, a co nie jest wyjątkiem zależy od punktu widzenia (siedzenia?). Dla topologa (np. z Warszawy) wyjątkowe mogą być funkcje różniczkowalne, bo jak wiadomo stanowią zbiór I kategorii Baire'a w zbiorze wszystkich funkcji ciągłych. Co prawda udowodniono, że funkcje ciągłe bez jednostronnych pochodnych również nieskończonych to już rzadkość (S.Saks, Fund. Math. 19(1932), 211 - 219), choć jak wiadomo Абра́м Само́йлович Безико́вич skonstrował funkcję ciągłą, określoną na całej prostej bez pochodnych jednostronnych, więc jednak takie dziwolągi też istnieją. Znacznie później wykazano, że jednak jest ich dużo: J.Maly, Where the continuous functions without unilateral derivatives are typical, Transactions AMS 283(1984), 169-175. Ciągłe oczywiście są ważne, a różniczkowalne nie dla wszystkich, chociaż jednak w wielu dziedzinach np. fizyki wielokrotna różniczkowalność, a nawet analityczność jest zakładana automatycznie i pomysł rozpatrywania wspomnianych wyżej typowych dziwactw byłby uznany za nieprzyzwoity (są jednak ruchy Browna . . .).

Każdy wie, że jeśli już zajmujemy się funkcjami różniczkowalnymi, to jeśli pierwsza pochodna w jakimś punkcie znika, to druga już nie. Są co prawda odchylenia od normy typu x^n dla $n \geq 3$, $\sin x$, ale przecież nimi nie warto się zbytnio przejmować, zresztą wyjątki tylko potwierdzają regułę. Jednak w opisach zjawisk występujących w przyrodzie powinna być jakaś odporność na drobne zmiany różnych parametrów, bo przecież na ogół są one przybliżone. Powstał więc drobny problem: czy można każdą funkcję $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ przybliżyć funkcją *typową*, więc w szczególności taką, której punkty krytyczne są nieosobliwe ($f'(x) = 0 \Longrightarrow f''(x) \neq 0$). Okazało się, że można. Brown w 1935 r udowodnił szczególny przypadek twierdzenia Sarda z 1942 roku: jeśli $f\colon \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem klasy C^n przy czym $n > max(0, \ell - k)$, to miara zbioru zbioru wartości krytycznych, czyli zbioru $\{y \in \mathbb{R}^k\colon \quad \exists_{x\in\mathbb{R}^\ell} y = f(x) \;\text{ i }\; Df(x)(\mathbb{R}^\ell) \neq \mathbb{R}^k\}$ jest równa 0. Twierdzenie nie ma prostego uogólnienia na przestrzenie wymiaru nieskończonego (istnieje przekształcenie klasy C^∞ z przestrzeni ℓ^2 na prostą, którego zbiór wartości krytycznych jest całą prostą). Również nie można obniżyć klasy różniczkowalności, co zauważył już H.Whitney konstruując w 1937 r. funkcję klasy C^1 z $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}$, której gradient znika na pewnym zbiorze spójnym, a funkcja nie jest na nim stała.

Twierdzenie Sarda (Browna–Sarda wg. Milnora) pozwala na dowodzenie gęstości porządnych funkcji w większych rodzinach funkcji. Przez pewien czas w drugiej połowie ubiegłego wieku próbowano dowieść, że porządne przekształcenia, dające szanse na opisy zjawisk fizycznych i nie tylko są gęste w zbiorze wszystkich rozsądnych przekształceń. Nie udało się do tej pory osiągnąć celu, oczywiście wyniki częściowe różni ludzie uzyskali, co pozwoliło im uzyskiwać kolejne awanse akademickie tym nie mniej zainteresowanie tematyką zmniejszyło się bardzo ze względu na brak pomysłu na dalszy **ISTOTNY** postęp.

Udało się bez trudu udowodnić, że w zbiorze dyfeomorfizmów (danej rozmaitości) gęste są te, których punkty stałe, a nawet okresowe, są hiperboliczne, co oznacza, że liczby zespolone o wartości bezwzględnej 1 nie wartościami własnymi różniczki takiego dyfeomeorfizmu w jego punktach stałych, a w przypadku punktów okresowych, zamiast dyfeomorfizmu pojawia się jego okres–krotna potęga w sensie złożenia. Taki dowód nie jest trudny i student, który zna twierdzenie Sarda jest w stanie w niedługim czasie go wymyślić (to łatwa część twierdzenia zwanego twierdzeniem o gęstości Kupki–Smale'a, więc twierdzenia o nazwie dosyć wyjątkowej i łatwo wpadającej w ucho). Z tego, że wszystkie punkty stałe są hiperboliczne i rozmaitość jest zwarta, wynika, że dyfeomorfizm ma ich skończenie wiele.

Gdyby więc pojawił się jakiś niehiperboliczny można by zaburzając nieco dyfeomorfizm zmieniać liczbę punktów stałych o danym wymiarze rozmaitości stabilnej, więc zmieniać strukturę topologiczną jego orbit. Ten argument nie działa w przypadku rozmaitości niezwartych, np. $\mathbb{R}^2$. Gdy dopuszczalne są małe zmiany w sensie C^1–topologii nie jest to specjalnym problemem, bo można dyfeomorfizm zmienić tak, aby w pewnej mapie stał się przekształceniem liniowym, którego różniczka w punkcie stałym ma wartość własną będącą pierwiastkiem jakiegoś stopnia z liczby 1, co powoduje pojawienie się nieprzeliczalnie wielu punktów okresowych. To odróżnia go zdecydowanie od tych dyfeomorfizmów, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne.

Co się jednak stanie, gdy dopuścimy jedynie zaburzenia małe w C^k–topologii, np. dla $k = 3$?

Teraz będzie trochę inaczej. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^3 prostej i niech $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = -1$. Mamy więc niehiperboliczny punkt stały. Z uczynionego założenia wynika, że

$$(f \circ f)''(0) = f''(f(0)) \cdot (f'(0))^2 + f'(f(0)) \cdot f''(0) = f''(0) \cdot (-1)^2 + (-1) \cdot f''(0) = 0\,.$$

Ten wynik jest niezależny od wartości drugiej pochodnej funkcji f w zerze. To jest w zasadzie fakt topologiczny. W dostatecznie małym otoczeniu zera funkcja

$$f \circ f(x) = \varphi(x) = \mathbf{x} + ax^2$$

jest dyfeomorfizmem. Punkt 0 to jego punkt stały. Jeśli $a > 0$ i $x < 0$ oraz $|x|$ jest dostatecznie mały, to $x < \varphi(x) < 0$. Stąd łatwo wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(x) = 0$, tutaj $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ liter } \varphi}$. Jeśli natomiast $a > 0$ i $x > 0$ oraz x jest dostatecznie małe, to wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^{-n}(x) = 0$. Oznacza to, że punkty z lewej strony są przez punkt stały przyciągane, a z prawej — odpychane. Tak jednak nie może zdarzyć się w przypadku $f \circ f$, bo z punktu widzenia orbit tej funkcji pojęcia prawa i lewa strona tracą sens: punkty z prawej strony przerzucane są na lewą i odwrotnie, więc dynamika po obu stronach jest taka sama.

Jeśli założymy dodatkowo, że $(f \circ f)'''(0) \neq 0$, np. $f(x) = -x - x^3$, to po małym, w sensie C^3 zaburzeniu, trzecia pochodna funkcji $g \circ g$, $g \approx_{C^3} f$, będzie różna od 0 w pewnym otoczeniu punktu stałego g, który znajdzie się w pobliżu 0. Wobec tego w tak małym otoczeniu zera funkcja $g \circ g$ ma co najwyżej jeden punkt przegięcia. Stąd łatwo wynika, że $g \circ g$ ma co najwyżej trzy punkty stałe, g ma tylko jeden (to stwierdzenie wynika już z tego, że $g =\approx f$ w sensie C^1). Wobec tego dwa „zewnętrzne" punkty stałe $g \circ g$ tworzą orbitę okresową o okresie 2. Można też zauważyć, że jeśli punkt stały g jest odpychający, to $g \circ g$ ma tylko jeden punkt stały, jeśli natomiast punkt stały g jest przyciągający, to powstaje też orbita okresowa o okresie 2, która jest odpychająca. Okazuje się, że zaburzając mało w sensie C^3 dyfeomorfizm $-x-x^3$ otrzymujemy tylko dyfeomorfizmy, których zachowanie jest takie samo ja pewnych dyfeomorfizmów, których wszystkie orbity okresowe są hiperboliczne.

Na koniec dodajmy, że jeśli rozpatrujemy rodziny przekształceń zależne przynajmniej od jednego parametru, to może zdarzyć się, że pojawianie się opisanego wyżej efektu jest nieuniknione. Mówimy wtedy o bifurkacji podwojenia okresu. Warunki nakładane w książkach na te rodziny powodują, że np. jednoparametrowa rodzina przekształceń, więc krzywa w przestrzeni przekształceń przecina hiperrpowierzchnię kowymiaru 1 złożoną z przekształceń mających punkt stały opisamnego typu.