# Pochodne i optymalizacja

Michał Krych, 14 maja 2017 r., poprawione 16 listopada 2017 r.

Z aktualnej podstawy programowej:

1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;

2) oblicza pochodne funkcji wymiernych;

3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej;

4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji;

5) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Kilka słów o tym, co naprawdę powinno być przerobione w szkołach na lekcjach w świetle obowiązującej podstawy programowej.

Pojęcie ciągłości jest potraktowane intuicyjnie, podobnie pojęcie pochodnej. W podstawie w jawny sposób nie występuje definicja ciągłości. Podobnie definicja pochodnej. Jednak występują granice funkcji, również bez definicji, która dla większości uczniów byłaby trudna (ponad 100 lat używano pochodnych, granic itp. zanim zdefiniowano ściśle granicę ciągu i funkcji). W istniejącej sytuacji należy mówić o tych pojęciach do pewnego momentu intuicyjnie – nie ma innej możliwości. Jednak po sformułowaniu podstawowych twierdzeń trzeba opierać się na nich i używać ich do rozwiązywania zadań bez wspierania się tekstami w rodzaju „jest oczywiste, że …”, „każdy widzi, że …” mającymi charakter demagogiczny. Jasne jest, że lista twierdzeń podawanych bez dowodu powinna być możliwie krótka. W tej sytuacji pełnią one rolę pewników — podajemy je bez dowodu, ale później z nich korzystamy bez wydłużania listy.

**Definicja 1 . (pochodnej)** Załóżmy, że funkcja $f$ jest określona w dziedzinie zawierającej przedział otwarty o środku $p$ oraz że istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$. Granicę tę nazywamy pochodną funkcji $f$ w punkcie $p$ i oznaczamy symbolem $f'(p)$ lub $\frac{df}{dx}(p)$. Jeśli pochodna jest skończona, czyli gdy jest liczbą, to mówimy, że funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $p$. $\square$

**Przykład 2 .** Niech $f(x)=c$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, gdzie $c$ oznacza ustaloną liczbę rzeczywistą. Wtedy $f'(x)=0$ dla każdego $x$, bo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$. $\square$

**Przykład 3 .** Niech $f(x)=x$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Wtedy $f'(x)=1$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Wynika to stąd, że $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1$, a granicą funkcji stałej (zmiennej $h$) jest jej wartość, zatem $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$.

**Twierdzenie 4 . (o arytmetycznych własnościach pochodnej)**
Załóżmy, że funkcje $f$ i $g$ są różniczkowalne w punkcie $x$. Wtedy funkcje $f\pm g$, $f\cdot g$ i, jeśli $g(x)\neq 0$, to również $\frac{f}{g}$ są różniczkowalne w punkcie $x$ i zachodzą wzory:
$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$ oraz $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$,

$(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ oraz $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$,
$\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$ dla każdej liczby $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Dowody twierdzeń o pochodnej sumy i różnicy sprowadzają się do zastosowania twierdzenia o granicy sumy i różnicy funkcji, więc te są w zasięgu uczniów. Dowody twierdzeń o granicy iloczynu i ilorazu wymagają skorzystania z ciągłości funkcji $f$ i $g$. Znaleźć je można w praktycznie wszystkich podręcznikach rachunku różniczkowego i całkowego.

**Przykład 5**. Jeśli $f(x) = x^2$, to $f'(x) = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$. $\square$

**Przykład 6**. Jeśli $f(x) = x^3$, to $f'(x) = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$. $\square$

**Przykład 7**. Jeśli $f(x) = x^4$, to $f'(x) = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$. $\square$

**Przykład 8**. Jeśli $f(x) = x^{-1}$, to $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$.
Można też postąpić nieco inaczej. Z twierdzenia o pochodnej ilorazu wynika istnienie pochodnej funkcji $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Możemy teraz skorzystać z twierdzenia o pochodnej iloczynu. Mamy
$0 = (xf(x))' = (x)'f(x) + xf'(x) = f(x) + xf'(x)$, a stąd $f'(x) = -\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$. $\square$

**Przykład 9**. Jeśli $f(x) = x^{-2}$, to $f'(x) = (x^{-1} \cdot x^{-1})' = (x^{-1})' \cdot x^{-1} + x^{-1} \cdot (x^{-1})' =$
$= -x^{-2} \cdot x^{-1} + x^{-1} \cdot (-x^{-2}) = -2x^{-3}$. $\square$

**Przykład 10**. Jeśli $f(x) = x^{-3}$, to $f'(x) = (x^{-2} \cdot x^{-1})' = (x^{-2})' \cdot x^{-1} + x^{-2} \cdot (x^{-1})' =$
$= -2x^{-3} \cdot x^{-1} + x^{-1} \cdot (-2x^{-3}) = -4x^{-3}$. $\square$

Stosując łatwe rozumowanie indukcyjne można dowieść, że prawdziwe jest

**Twierdzenie 11**. Dla każdej liczby całkowitej $n$ i każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ zachodzi równość $(x^n)' = nx^{n-1}$. Dla $n \geqslant 1$ równość ta ma miejsce również dla $x = 0$. $\square$

**Uwaga 12**. Założenie o całkowitości wykładnika w powyższym twierdzeniu jest zbędne. Jest ono prawdziwe dla każdego wykładnika $n \in \mathbb{R}$, dla którego wyrażenie $nx^{n-1}$ ma sens lub można nadać mu sens. W szczególności

- $(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla każdego $x > 0$,
- $(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ dla każdego $x \neq 0$,
- $\left(\sqrt[5]{x^2}\right)' = \left(x^{2/5}\right)' = \frac{2}{5}x^{-3/5} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ dla każdego $x \neq 0$,
- $\left(\sqrt[6]{x^7}\right)' = \left(x^{7/6}\right)' = \frac{7}{6}x^{1/6} = \frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$ dla każdego $x \geqslant 0$,
- $(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$ dla każdego $x \geqslant 0$.

W szkole tego wzoru nie ma, ale nauczyciel powinien zdawać sobie sprawę z tego, że jest on prawdziwy. □

**Przykład 13** . Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (1, 0)$. To zadanie 6. z matury na poziomie rozszerzonym z roku 2017. Potrzebna jest pochodna w punkcie 1. Z definicji pochodnej otrzymujemy $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$. Wobec tego styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $(1, 0)$ opisana jest równaniem $y = \frac{1}{2}(x-1)$. □

**Przykład 14** . Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c$ zachodzi równość

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$$

Wynika to z twierdzenia o arytmetycznych własnościach pochodnej i zdania poprzedzającego ten przykład. □

Teraz najważniejsze z punktu widzenia szkolnej matematyki twierdzenie o pochodnych.

**Twierdzenie 15** . **(o monotoniczności funkcji różniczkowalnej)**
Załóżmy, że $f$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału $P$ i różniczkowalną we wszystkich jego punktach wewnętrznych. Przy tych założeniach funkcja $f$ jest:

- niemalejąca ($x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna $f'$ jest nieujemna,
- nierosnąca ($x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna $f'$ jest niedodatnia. □

W szkole twierdzenie to należy podawać jako pewnik. Jego dowód podamy na końcu tego tekstu. W tym twierdzeniu nie zakładaliśmy istnienia pochodnej w końcach przedziału $P$. To samo dotyczy następnych dwóch twierdzeń.

**Twierdzenie 16** . **(charakteryzujące funkcję stałą)**
Funkcja ciągła na przedziale $P$, różniczkowalna we wszystkich jego punktach wewnętrznych jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$ dla każdego punktu wewnętrznego przedziału $P$.[1]

**Dowód.** Funkcja stała jest jednocześnie niemalejąca i nierosnąca, zatem jej pochodna jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia, czyli zerowa. Jeśli natomiast pochodna jest zerowa, czyli jednocześnie nieujemna i niedodatnia, to funkcja jest zarówno niemalejąca, jak i nierosnąca, więc jest stała. □

[1] Można z łatwością to twierdzenie udowodnić bezpośrednio, bez powoływania się na właśnie wykazane twierdzenie o monotoniczności.

**Twierdzenie 17** . **(o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych)**
Zakładamy jak poprzednio, że funkcja $f$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $P$ oraz że jest różniczkowalna w każdym punkcie wewnętrznym przedziału $P$. Przy tych założeniach funkcja $f$ jest:

- ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna oraz między każdymi dwoma punktami przedziału $P$ znajduje się punkt, w którym pochodna $f'$ jest dodatnia,
- ściśle malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niedodatnia oraz między każdymi dwoma punktami przedziału $P$ znajduje się punkt, w którym pochodna $f'$ jest ujemna. $\square$

**Przykład 18** . Niech $f(x) = 20x^3 - 15x^4 + 3x^5$. Wtedy zachodzi równość
$$f'(x) = 60x^2 - 60x^3 + 15x^4 = 15x^2(x-2)^2 \geqslant 0$$
przy czym ta pochodna zeruje się jedynie w punktach 0 oraz 2. Z twierdzenie o ścisłej monotoniczności wynika, że funkcja $f$ jest ściśle rosnąca na całej prostej. $\square$

**Przykład 19** . Niech $f(x) = 48x^2 - 12x^4 + x^6$. Wtedy $f'(x) = 96x - 48x^3 + 6x^5 = 6x(x^2-4)^2$. Wobec tego $f'(x) \leqslant 0$ dla każdego $x < 0$ oraz $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x > 0$. $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \{-2, 0, 2\}$. Z twierdzenia o ścisłej monotoniczności wynika natychmiast, że na półprostej $(-\infty, 0\rangle$ funkcja $f$ jest ściśle malejąca, a na półprostej $\langle 0, +\infty)$ – ściśle rosnąca. Jej najmniejszą wartością jest więc liczba $f(0) = 0$. W punktach $-2$ i 2 funkcja nie ma lokalnych ekstremów, choć pochodna w nich zeruje się. $\square$

Teraz nieszkolne różniczkowanie.

**Przykład 20** . Niech $f(x) = x + \sin x$. Wtedy $f'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$ przy czym $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = (2k+1)\pi$ dla pewnej liczby całkowitej $k$. Wobec tego funkcja $f$ jest ściśle rosnąca na całej prostej. Jej pochodna zeruje się w nieskończenie wielu punktach. $\square$

Omówię zadanie 15 z matury 2017.

**Przykład 21** . Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej $P$. Oblicz wysokość i promień tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.
*Rozwiązanie.* Niech $r > 0$ oznacza promień podstawy walca, a $h$ – jego wysokość. Zachodzi wtedy wzór $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Wobec tego $h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}$. Jest jasne, że wysokość walca jest liczbą dodatnią, zatem $P > 2\pi r^2$, czyli $0 < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}$. Mamy więc $V(r) = \pi r^2 \frac{P-2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2}(rP - 2\pi r^3)$. Zachodzi równość $V'(r) = \frac{1}{2}(P - 6\pi r^2)$. Jedynym punktem przedziału $\left(0, \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$, w którym ta pochodna jest równa 0 jest liczba $\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$. Jeśli $0 < r < \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, to $V'(r) > 0$, a jeżeli $\sqrt{\frac{P}{6\pi}} < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}$, to $V'(r) < 0$. Wobec tego z twierdzenia o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych wynika, że $V$ jest ściśle rosnąca na przedziale otwarto–domkniętym

$\left(0, \sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right\rangle$ i wobec tego jeśli $0 < r < \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, to $V(r) < V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)$. Na przedziale domknięto–otwartym $\left\langle\sqrt{\frac{P}{6\pi}}, 0\right)$ funkcja $V$ jest ściśle malejąca, więc $V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right) > V(r)$ dla każdej liczby $r \in \left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$. Udowodniliśmy w ten sposób, że największą wartością funkcji $V$ jest liczba $V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right) = \frac{1}{2}\left(P\sqrt{\frac{P}{6\pi}} - 2\pi\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)^3\right) = \frac{P}{3}\cdot\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, promieniem podstawy tego walca jest liczba $\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, a jego wysokością – liczba $2\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$. $\square$

**Przykład 22** . Znaleźć maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół jego przeciwprostokątnej.

*Rozwiązanie*: Niech $a, b, c$ oznaczają boki trójkąta, przy czym $c$ to przeciwprostokątna. Bryła, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta wokół boku c to dwa stożki złączone podstawami. Promieniem wspólnej podstawy obu stożków jest wysokość $h_c$ danego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną $c$. Z wzorów na pole trójkąta: $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ wynika, że $h_c = \frac{ab}{c}$. Suma wysokości tych stożków jest równa $c$. Stąd wnioskujemy, że suma ich objętości jest równa $V = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{ab}{c}\right)^2\cdot c = \frac{\pi(ab)^2}{3c}$.

Wiemy, że $a^2 + b^2 = c^2$ (tw. Pitagorasa) i $a + b + c = 1$ (dany obwód trójkąta). Wobec tego

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2) = (1-c)^2 - c^2 = 1 - 2c.$$

Zachodzą więc wzory $V = V(c) = \frac{\pi(1-2c)^2}{12c} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{c} - 4 + 4c\right)$ i $V'(c) = \frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{c^2} + 4\right)$. Wynika stąd, że $V'(c) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \pm\frac{1}{2}$, zatem kandydatami na punkt, w którym funkcja $V$ przyjmuje swą największą wartość są $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$. Ponieważ $c$ jest długością boku trójkąta, więc $c > 0 > -\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ też nie wchodzi w grę, bo wtedy byłaby spełniona równość $a + b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = c$, wbrew temu, że: *suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego*. Oznacza to, że pochodna funkcji $V$ jest różna od 0 w każdym punkcie nieznanej nam jeszcze dziedziny, zatem funkcja $V$ ściśle monotoniczna na każdym przedziale zawartym w swej dziedzinie. Musimy więc znaleźć dziedzinę funkcji $V$.

Liczby $a, b, c$ mają być bokami trójkąta prostokątnego o obwodzie 1. Muszą więc być dodatnimi rozwiązaniami układu równań: $a^2 + b^2 = c^2,\ a + b = 1 - c$. Warunek ten jest też dostateczny: jeśli $a, b, c > 0$ i $a^2 + b^2 = c^2$, to $(a+b)^2 > a^2 + b^2 = c^2$, zatem $a + b > c$ i oczywiście $a + c > c > b$ oraz $b + c > c > a$. Oznacza to, że z odcinków o długościach $a, b, c$ można zbudować trójkąt, oczywiście prostokątny. Układ równań równoważny jest następującemu:

$$a + b = 1 - c, \quad ab = \frac{(1-c)^2 - c^2}{2} = \frac{1}{2} - c.$$

Liczby $a$ i $b$ są więc pierwiastkami równania kwadratowego $t^2 - (1-c)t + \frac{1}{2} - c = 0$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by to równanie miało dodatnie pierwiastki dla dodatniej wartości parametru $c$, jest $0 < c < \frac{1}{2}$ oraz

$$0 \leqslant \Delta = (1-c)^2 - 4\left(\tfrac{1}{2} - c\right) = -1 + 2c + c^2 = (c+1)^2 - 2$$

czyli $\sqrt{2} - 1 \leqslant c < \frac{1}{2}$. Z tej nierówności wynika, że $V'(c) = \frac{\pi}{12}\left(\frac{-1}{c^2} + 4\right) < 0$, a to oznacza, że funkcja $V$ maleje na przedziale $\left\langle\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$. Wobec tego największą wartością funkcji $V$ jest

liczba $V\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi(3-2\sqrt{2})^2}{12(\sqrt{2}-1)} = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)^4}{12(\sqrt{2}-1)} = \frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2}-1\right)^3 = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{2}-7) \approx 0{,}02$.
Dla $c = \sqrt{2}-1$ otrzymujemy trójkąt równoramienny, bo $\Delta = 0$, więc pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - (1-c)x + \frac{1}{2} - c = 0$, czyli liczby $a$ i $b$ są równe. Dodajmy jeszcze, że w zadaniu nie wymagano oszacowania największej objętości.

**Komentarz**: Ten przykład powinien przekonać uczniów i nauczycieli o konieczności zwracania uwagi na dziedzinę funkcji – w tym zadaniu to nie jest czynność rytualna. Bez znalezienia dziedziny nie da się znaleźć bryły o największej objętości. Omawiałem to zadanie wielokrotnie na ćwiczeniach ze studentami, jeszcze się nie zdarzyło, by studenci chcieli, aby objętość $V$ potraktować np. jako funkcję zmiennej $a$. Skorzystalibyśmy wtedy z następującego wzoru $V = V(a) = \frac{\pi a^2(1-2a)^2}{6(1-a)(1-2a+2a^2)}$. Maksimum osiągane byłoby w punkcie wewnętrznym dziedziny funkcji $V$, czyli przedziału $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, mianowicie w punkcie $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, zatem w punkcie zerowania się pochodnej funkcji $V$. Byłoby mniej kłopotu z dziedziną funkcji, za to więcej z obliczeniami. Często studenci nie potrafili stwierdzić, że ponieważ funkcja ma niezerową pochodną na przedziale, to jest na nim monotoniczna. Wydawało im się, że w obliczeniach był błąd, bo skoro w jakimś punkcie ma być maksimum, to pochodna musi się tam zerować zapominając, że to twierdzenie mówi o punktach **wewnętrznych** dziedziny. □

**Przykład 23**. Niech $a \geqslant b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Niech $P$ oznacza prostokąt, którego jeden bok ma długość $a$, a drugi $b$. Z prostokąta $P$ wycinamy cztery kwadraty o boku $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$ zawierające cztery wierzchołki $P$ tak, że pole $P$ zmniejsza się o $4x^2$. Następnie zaginamy „wystające” części powstałego dwunastokąta (niewypukłego) tak, by powstało pudełko o wymiarach $a-2x,\ b-2x,\ x$. Dla jakiego $x$ pojemność otrzymanego pudełka będzie największa?

*Rozwiązanie.* Niech $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ będzie pojemnością pudełka. $V$ jest funkcją ciągłą, a nawet różniczkowalną w każdym punkcie swej dziedziny. Z punktu widzenia pojemności pudełka dziedziną funkcji $V$ jest przedział $\left(0, \frac{b}{2}\right)$.

Spełniona jest równość $V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Ponieważ

$$\Delta = (4(a+b))^2 - 4\cdot 12\cdot ab = 16\left((a+b)^2 - 3ab\right) = 16(a^2 - ab + b^2) \geqslant 16b^2 > 0,$$

więc równanie kwadratowe $12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$ ma dwa pierwiastki, ale nie wiadomo, czy znajdują się one w przedziale $(0, \frac{b}{2})$. Ponieważ sumą pierwiastków jest liczba $\frac{4(a+b)}{12} > 0$, a iloczynem liczba $\frac{ab}{12} > 0$, więc obie liczby $\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ są dodatnie. Mamy

$$\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} = \frac{(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)}{6(a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}\,)} = \frac{ab}{2(a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}\,)} < \frac{b}{2},$$

bo $a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2} > a$. Teraz zauważmy, że

$$\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} \geqslant \frac{a+b+\sqrt{b^2}}{6} \geqslant \frac{b}{2}.$$

Wobec tego jeśli $0 < x < \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$, to $V'(x) > 0$, a jeśli $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} < x < \frac{b}{2}$, to $V'(x) < 0$. Wykazaliśmy, że na przedziale $\left(0, \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right\rangle$ funkcja $V$ rośnie, więc jeżeli $0 < x < \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$, to $V(x) < V\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)$, a na przedziale $\left\langle \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}, \frac{b}{2}\right)$ funkcja $V$ maleje, zatem jeśli $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} < x < \frac{b}{2}$, to $V\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right) > V(x)$. Stąd wynika, że największą wartością funkcji $V$ jest liczba $V\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)$, zatem bok kwadratu powinien mieć długość $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. □

*Uwaga.* Można np. przyjąć $a = b = 4$ albo $a = 5$ i $b = 8$. □

A teraz kilka słów o twierdzeniach i ich dowodach, z których korzystać należy w zadaniach optymalizacyjnych. Podstawowym twierdzeniem rachunku różniczkowego jest

**Twierdzenie 24 . (Lagrange'a o wartości średniej)**
Jeśli funkcja $f$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału domkniętego $\langle a, b\rangle$ i ma pochodną we wszystkich punktach przedziału otwartego $(a, b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ □

To twierdzenie nie jest wymienione w podstawie programowej, jednak na nim opierają się twierdzenia używane do tzw. badania funkcji. Podkreślmy, że nie ma potrzeby zakładać istnienia pochodnej w punkcie $a$ ani w punkcie $b$. Ma to istotne znaczenie dla zastosowań tego twierdzenia. Dowód tego twierdzenia w zasadzie wymaga skorzystania z faktu, którego w szkole nie ma: chodzi o twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą określoną na domkniętym przedziale. Jego dowód wymaga pewnika ciągłości, zwanego też aksjomatem Dedekinda, więc nie bardzo nadaje się się do podręczników szkolnych. Trzeba też skorzystać z twierdzenia, które zaczął stosować Fermat, choć za jego czasów pochodnych jeszcze nie znano. Domkniętość przedziału jest istotnym założeniem twierdzenia Weierstrassa. Funkcja $\frac{1}{x}$ określona na przedziale $(0, 1\rangle$ nie jest ograniczona z góry, więc największej wartości nie ma. Funkcja $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ określona na przedziale $(0, 1\rangle$ nie jest ograniczona ani z góry ani z dołu, więc nie ma największej, ani najmniejszej wartości. Funkcja $\frac{1}{1+x^2}\sin\frac{1}{x}$ określona na przedziale $(0, 1\rangle$ jest ograniczona z góry i z dołu, ale nie ma ani największej ani najmniejszej wartości, bo $-1 < \frac{1}{1+x^2}\sin\frac{1}{x} < 1$ dla każdego $x \neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{-2}} \sin\frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{-2}} = 1$ oraz analogicznie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+(2n\pi-\frac{\pi}{2})^{-2}} \sin\frac{1}{(2n\pi-\frac{\pi}{2})^{-1}} = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+(2n\pi-\frac{\pi}{2})^{-2}} = -1$.

**Twierdzenie 25 .** (o zerowaniu się pochodnej w punktach przyjmowania wartości ekstremalnych)
Jeśli $f$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie $p$, określoną na przedziale otwartym i przyjmuje w punkcie $p$ wartość najmniejszą lub największą w tym przedziale, to $f'(p) = 0$.

**Dowód.** Załóżmy, że funkcja $f$ ma w punkcie $p$ wartość największą. Znaczy to, że dla każdego punktu $x$ z dziedziny funkcji $f$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(p)$, zatem dla $h > 0$ mamy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leqslant 0$, wobec tego $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leq 0$. Mamy też $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \geqslant 0$ dla $h < 0$. Obie te nierówności mogą zachodzić jednocześnie jedynie w przypadku $f'(p) = 0$.

Jeśli $f$ przyjmuje w punkcie $p$ wartość najmniejszą, to funkcja przeciwna $-f$ przyjmuje w tym punkcie wartość największą, więc $0 = (-f)'(p) = -f'(p)$. W ten sposób zakończyliśmy dowód. $\square$

Wypada podkreślić, że jeśli funkcja określona na przedziale (nieotwartym) przyjmuje wartość największą w jego końcu, to nawet w przypadku, gdy jest w tym końcu jednostronnie różniczkowalna, jej pochodna nie musi być równa 0. Funkcja $x$ rozpatrywana na przedziale $\langle 7, 13\rangle$ przyjmuje swą największą wartość w punkcie 13, w którym jej pochodną jest liczba 1.

**Dowód.** (twierdzenia o monotoniczności funkcji różniczkowalnej). Załóżmy, że $f$ jest funkcją niemalejącą oraz że ma ona w pewnym punkcie $p$ przedziału $(a, b)$ pochodną. Ponieważ $f$ jest funkcją niemalejącą, więc dla każdego $h$, dla którego $p+h \in (a, b)$, mamy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \geqslant 0$. Stąd od razu wynika, że $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \geqslant 0$, co kończy dowód pierwszej implikacji.

Załóżmy teraz, że pochodna funkcji $f$ jest nieujemna we wszystkich punktach przedziału $(a, b)$ i niech $x, y \in P$ i $x < y$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje taka liczba $c \in (x, y)$, że $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geqslant 0$, zatem licznik i mianownik ułamka $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ mają taki sam znak, a to oznacza, że funkcja $f$ jest niemalejąca na przedziale $P$.

Drugą część twierdzenia można uzasadnić w taki sam sposób. Można też sprowadzić ją do części pierwszej zastąpiwszy funkcję $f$ funkcją $-f$. $\square$

**Dowód.** (twierdzenia o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych). Załóżmy, że funkcja $f$ jest ściśle rosnąca. Wobec tego jest niemalejąca, więc na podstawie poprzedniego twierdzenia jej pochodna jest nieujemna. Jeśli $x, y \in P$ i $x < y$, to w pewnym punkcie wewnętrznym $z$ przedziału $\langle x, y\rangle$ zachodzi nierówność $f'(z) > 0$, bowiem gdyby pochodna równa była 0 w każdym punkcie przedziału $\langle x, y\rangle$, to funkcja $f$ byłaby stała na tym przedziale, więc nie byłaby *ściśle* rosnąca. Zajmiemy się dowodem implikacji przeciwnej. Zakładamy teraz, że $f$ jest funkcją ciągłą, której pochodna jest nieujemna. Z poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że $f$ jest funkcją niemalejącą. Jeśli nie jest ona ściśle rosnąca, to istnieją takie punkty $x, y \in P$, że $x < y$ i $f(x) = f(y)$. Z tego, że $x < z < y$ wynika, że zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(y) = f(x)$, co oznacza, że $f(x) = f(z)$, a to z kolei oznacza, że $f$ jest funkcją stałą na przedziale $\langle x, y\rangle$, a z tego wynika, że $f'(z) = 0$ dla każdego punktu $z \in \langle x, y\rangle$, wbrew założeniu. Druga część twierdzenia może być uzyskana z pierwszej przez rozważenie funkcji $-f$ zamiast funkcji $f$. $\square$

Można ominąć twierdzenie o wartości średniej ukrywając przy okazji pewnik ciągłości głęboko.

Dowód poprzedzimy uwagą wynikającą natychmiast z definicji granicy funkcji.

**Uwaga 26**. Jeśli $p$ jest punktem wewnętrznym dziedziny funkcji $f$, która jest różniczkowalna w $p$, i $f'(p) > 0$, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to punkt $p + h$ znajduje się w dziedzinie funkcji $f$, a liczby $h$ i $f(p + h) - f(p)$ mają ten sam znak.

**Dowód.** Jeśli granica funkcji przy $h \longrightarrow 0$ jest dodatnia, to w pewnym otoczeniu punktu 0 funkcja też jest dodatnia, zatem z tego, że $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = f'(p) > 0$ wynika istnienie takiej liczby $\delta > 0$, że jeżeli $0 < |h| < \delta$, to $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} > 0$, a to oznacza, że licznik i mianownik mają taki sam znak. $\square$

**Drugi dowód twierdzenia o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych.** Załóżmy, że funkcja $f$ jest określona na przedziale $P$, być może zawierającym jeden ze swych końców lub oba, być może nieograniczonym, i jest ciągła we wszystkich punktach przedziału $P$ oraz jest różniczkowalna w punktach wewnętrznych tego przedziału. Załóżmy, że pochodna $f'$ jest dodatnia we wszystkich punktach wewnętrznych przedziału $P$.

Niech $x$ oznacza punkt wewnętrzny przedziału $P$. Z uwagi poprzedzającej ten dowód wynika, że istnieje taka liczba $\delta_x > 0$, że jeśli $0 < h < \delta_x$, to $f(x-h) < f(x) < f(x+h)$. Innymi słowy z nierówności $x < t < x + \delta_x$ wynika, że $f(x) < f(t)$, a z nierówności $x - \delta_x < t < x$ wynika, że $f(t) < f(x)$. Niech $y_x \in P$ będzie największą taka liczbą, że z nierówności $x < t < y_x$ wynika nierówność $f(x) < f(t)$. Oczywiście $x + \delta_x \leqslant y_x$. Jeśli $y_x$ jest punktem wewnętrznym przedziału $P$, to z tego, że $y_x < t < y_x + \delta_{y_x}$ wynika, że $f(y_x) < f(t)$. Niech $s \in (x, y_x)$ będzie takim punktem, że $y_x - \delta_{y_x} < s < y_x$. Zachodzą nierówności $f(x) < f(s) < f(y_x) < f(t)$, ale to oznacza, że wbrew założeniu, liczbę $y_x$ można powiększyć o $\delta_{y_x}$. Udowodniliśmy, że $y_x$ jest końcem przedziału $P$. Ponieważ tak jest dla każdego punktu wewnętrznego przedziału $P$, więc jeśli $x_1$ i $x_2$ są punktami wewnętrznymi przedziału $P$ oraz $x_1 < x_2$, to również $f(x_1) < f(x_2)$.

Jeśli $b \in P$ jest prawym końcem przedziału $P$, to $f(b) = \lim_{x\to b} f(x)$, a ponieważ funkcja $f$ jest ściśle rosnąca na wnętrzu przedziału $P$, to $f(x) \leqslant f(b)$ dla każdego punktu wewnętrznego $x$ przedziału $P$. Stąd jednak wynika, że jeśli $x < t < b$, to $f(x) < f(t) \leqslant f(b)$, więc $f(x) < f(b)$. Podobnie dowodzimy, że jeśli $a \in P$ jest lewym końcem przedziału $P$, to $f(a) < f(x)$ dla każdego punktu $x$ z wnętrza $P$. Udowodniliśmy, że funkcja $f$ jest ściśle rosnąca na przedziale $P$.

Teraz kolej na wywnioskowanie tego, że jeśli pochodna funkcji $f$ jest nieujemna we wszystkich wewnętrznych punktach przedziału $P$, to sama funkcja $f$ jest niemalejąca. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Niech $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x$. Wtedy $f_\varepsilon$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $P$, jako suma funkcji ciągłych. Jeśli $x$ jest punktem wewnętrznym przedziału $P$, to $f'_\varepsilon(x) = f'(x) + \varepsilon > 0$. Z tego, co wykazaliśmy wcześniej, wnioskujemy, że jeżeli $x_1, x_2 \in P$ i $x_1 < x_2$, to $f_\varepsilon(x_1) < f_\varepsilon(x_2)$, czyli $f(x_1)+\varepsilon x_1 < f(x_2)+\varepsilon x_2$, zatem $\varepsilon(x_1-x_2) < f(x_2)-f(x_1)$. Ta nierówność zachodzi dla każdej dodatniej liczby $\varepsilon$. Wynika stąd, że zachodzi nierówność $f(x_2) - f(x_1) \geqslant \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon(x_1 - x_2) = 0$, więc $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Analogicznie dowodzimy, że funkcja o niedodatniej pochodnej jest nierosnąca. W szczególności funkcja o zerowej pochodnej jest jednocześnie niemalejąca i nierosnąca, zatem jest stała.

Stąd już łatwo wynika, że jeśli pochodna funkcji $f$ jest nieujemna i w każdym niepustym, otwartym podprzedziale przedziału $P$ znajduje się punkt, w którym $f'$ jest dodatnia, to funkcja $f$ jest ściśle rosnąca.

Udowodniliśmy więc zarówno twierdzenie o monotoniczności funkcji różniczkowalnej jak i twierdzenie o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych w jedną stronę: z własności pochodnej wynika odpowiednia własność funkcji. Dowód implikacji przeciwnej jest taki sam, jak poprzednio – nie korzystaliśmy z twierdzenia o wartości średniej w rozumowaniu w tę stronę. $\square$

W zasadzie ten dowód nie wykracza poza to, co uczniowie w szkołach słyszą na lekcjach (jeśli akurat słuchają). Nie ma tu żadnych lokalnych ekstremów, bo one do tych zadań, które można rozwiązywać w czasie lekcji lub w czasie matur są niepotrzebne i co gorsza tylko komplikują rozumowania.

Uczniowie, którzy będą studiować w szkołach wyższych i będą tam mieć rachunek różniczkowy spotkają się zapewne z funkcjami dwu i większej liczby zmiennych. Tam jest jeszcze gorzej, ale tam lokalne ekstrema są niezbędne. Jednak wymaga to dobrego zrozumienia twierdzeń dla jednej zmiennej. Poniżej dwa ostrzeżenia.

**Uwaga 27** . Każdy wie, że wielomian parzystego stopnia o dodatnim współczynniku kierującym przyjmuje w jakimś punkcie prostej swą najmniejszą wartość. Tak jest dla jednej zmiennej. Wielomian $x^2 + (xy - 1)^2$ zmiennych $x$ i $y$ przyjmuje jedynie wartości dodatnie: układ równań $x = 0$ i $xy - 1 = 0$ jest w oczywisty sposób sprzeczny. Jednocześnie każda liczba dodatnia $c$ jest jego wartością: wystarczy przyjąć $x = \sqrt{c}$ oraz $y = \frac{1}{\sqrt{c}}$, by się o tym przekonać.[2] $\square$

**Uwaga 28** . Niech $f(x, y) = x^2 + y^2(1 + x)^3$. Jasne jest, że każda liczba rzeczywista jest wartością funkcji (wielomianu) $f$: $f(x, 1) = x^2 + (1 + x)^3$ jest wielomianem trzeciego stopnia zmiennej $x$, więc wszystkie liczby rzeczywiste są jego wartościami. Jeżeli $x > -1$ oraz $(x, y) \neq (0, 0)$, to $x^2 + y^2(1 + x)^3 > 0$, zatem w punkcie $(0, 0)$ funkcja $f$ ma lokalne minimum właściwe. Warunkiem koniecznym na to, by miała ona w pewnym punkcie lokalne ekstremum jest zerowanie się pochodnych pierwszego rzędu. Mamy
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y^2(1 + x)^2$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y(1 + x)^3$. Przyrównując je obie do zera otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y^2(1 + x)^2 & = 0, \\ 2y(1 + x)^3 & = 0. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem jest punkt $(0, 0)$: z drugiego równania wynika, że $x = -1$ lub $y = 0$. W pierwszym przypadku z pierwszego równania wynika, że $x = 0$, wbrew równości $x = -1$. W drugim z równości $y = 0$ wynika, że $x = 0$. Jest to rezultat przez mało kogo oczekiwany,

[2] Ten przykład pojawił się kiedyś jako zadanie w *Delcie.*

większość osób spośród tych, które są w stanie tego rodzaju kwestie analizować, oczekuje przynajmniej jeszcze jednego punktu zerowania się obu pochodnych cząstkowych. $\square$

Dodajmy jeszcze, że wysilając się nieco można skonstruować funkcję określoną na $\mathbb{R}$, o wartościach rzeczywistych, której pochodna zeruje się w każdym punkcie wymiernym, istnieje we wszystkich punktach, każdy przedział zawiera punkt, w którym pochodna jest dodatnia. Taka funkcja jest ściśle rosnąca, co wynika z twierdzenia udowodnionego wyżej.

Ucząc młodzież znajdowania największych i największych wartości funkcji musimy podawać twierdzenia, z których korzystamy i odwoływać się do nich. Twierdzenia powinny mieć możliwie krótkie sformułowania i jak wszędzie w matematyce powinny być możliwie proste. Niestety w wielu podręcznikach, nie tylko szkolnych, są niedopowiedzenia, czasem błędy, a ich autorzy często powołują się na zbyt złożone twierdzenia, często nieudowodnione. W szkolnej praktyce w zasadzie jedynym twierdzeniem pozwalającym na znajdowanie wartości największych lub najmniejszych jest twierdzenie o monotoniczności funkcji różniczkowalnych i twierdzenie o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych. Funkcje, z którymi uczniowie mają do czynienia (wielomiany lub funkcje wymierne), są przedziałami monotoniczne i zawsze liczba przedziałów monotoniczności funkcji jest niewielka, więc żadne złożone twierdzenia potrzebne nie są.