Prawie elementarne sumowanie szeregu o wyrazie $\frac{1}{n^2}$

Skorzystamy po pewnym czasie ze znanej nierówności podwójnej $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, która zachodzi dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Najpierw jednak musimy przygotować się do jej zastosowania. Rozpoczniemy od dwóch wzorów

$$\sin(mx) = \binom{m}{1}\cos^{m-1}x\sin x - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\sin^3 x + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\sin^5 x - \binom{m}{7}\cos^{m-7}\sin^7 x + \cdots,$$

$$\cos(mx) = \binom{m}{0}\cos^m x - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\sin^2 x + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\sin^4 x - \binom{m}{6}\cos^{m-6}\sin^6 x + \cdots.$$

Te dwa wzory można udowodnić za pomocą indukcji, ale można też skorzystać z tego, że $i^2 = -1$ oraz z wzoru de Moivre'a znanego z algebry liniowej: $(\cos x + i\sin x)^m = \cos(mx) + i\sin(mx)$, wystarczy zastosować do lewej strony tej równości dwumian Newtona, następnie porównać części rzeczywiste i urojone prawej i lewej strony otrzymanej tożsamości. Korzystać będziemy jedynie z pierwszego.

W pierwszej równości podstawiamy kolejno w miejsce x liczby $\frac{\pi}{2n+1}$, $\frac{2\pi}{2n+1}$, $\frac{3\pi}{2n+1}, \ldots, \frac{n\pi}{2n+1}$ a zamiast m wpisujemy $2n+1$, korzystamy z tego, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ zachodzą wzory $\sin\frac{k\pi}{2n+1} \neq 0$, $\sin(k\pi) = 0$. Otrzymujemy

$$0 = \frac{\sin\frac{k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}} = \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}\frac{k\pi}{2n+1} - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}\frac{k\pi}{2n+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1} + \binom{2n+1}{5}\cos^{2n-4}\frac{k\pi}{2n+1}\sin^4\frac{k\pi}{2n+1} -$$

$$- \binom{2n+1}{7}\cos^{2n-6}\frac{k\pi}{2n+1}\sin^6\frac{k\pi}{2n+1} + \cdots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}\sin^{2n}\frac{k\pi}{2n+1} =$$

$$= \binom{2n+1}{1}\left(1-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^n - \binom{2n+1}{3}\left(1-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1} + \binom{2n+1}{5}\left(1-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{n-2}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 -$$

$$- \binom{2n+1}{7}\left(1-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{n-3}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^3 + \cdots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^n.$$

Oznacza to, że każda z liczb $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}$, ... ,$\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ jest pierwiastkiem równania

$$\binom{2n+1}{1}(1-x)^n - \binom{2n+1}{3}(1-x)^{n-1}x + \binom{2n+1}{5}(1-x)^{n-2}x^2 - \binom{2n+1}{7}(1-x)^{n-3}x^3 + \cdots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}x^n = 0.$$

Podstawiając $x = \frac{1}{y}$ do tej równości i mnożąc obie strony otrzymanego wzoru przez y^n otrzymujemy równość

$$\binom{2n+1}{1}(y-1)^n - \binom{2n+1}{3}(y-1)^{n-1} + \binom{2n+1}{5}(y-1)^{n-2} - \binom{2n+1}{7}(y-1)^{n-3} + \cdots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1} = 0.$$

Wynika stąd, że każda z liczb $\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}$, $\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}$, ... , $\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}$ jest pierwiastkiem równania z niewiadomą y. Lewa strona tego równania to wielomian n-tego stopnia zmiennej y. Wskazaliśmy n różnych pierwiastków tego wielomianu, czyli wszystkie. Sumę pierwiastków możemy znaleźć korzystając z wzoru Vieté'a. Współczynnik przy y^n w tym wielomianie to $\binom{2n+1}{1} = 2n+1$. Współczynnik przy y^{n-1} to $-\binom{2n+1}{1}\binom{n}{1} - \binom{2n+1}{3} = -\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. Stąd wynika, że

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3(2n+1)} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

Jak wiadomo zachodzą równości $\frac{1}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin^2 t} = \operatorname{ctg}^2 t + 1$. Z tej równości i poprzednio otrzymanego wzoru wnioskujemy, że

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1} + \cdots + \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2n(n+1)}{3} - n = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Mamy też $\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{2n+1}} < \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} < \frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Sumujemy stronami otrzymane n nierówności, korzystamy ze znalezionych formuł na sumy lewej i prawej strony, następnie wszystkie trzy strony mnożymy przez $\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2$ i oczom naszym ukazuje się nierówność:

$$\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2 \cdot \frac{n(2n-1)}{3} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2 \cdot \frac{2n(n+1)}{3}.$$

Korzystając z oczywistych równości $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2 \cdot \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{\pi^2}{6} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2 \cdot \frac{2n(n+1)}{3}$ i z twierdzenia o trzech ciągach stwierdzamy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

Jest to najprostszy dowód jaki znam. Nie piszę najkrótszy, lecz najprostszy: stosowaliśmy tu środki dowodowe dostępne już w pierwszym semestrze I roku dowolnych studiów, na których nauczana jest matematyka. Dowód można poważnie skrócić używając bardziej zaawansowanych narzędzi matematycznych.

Zaprezentowane rozumowanie pochodzi ze znakomitej książki „Biblioteka kółka matematycznego, Arytmetyka i algebra" autorstwa D.O.Szklarskiego, N.N.Czencowa oraz I.M.Jagłoma, w języku rosyjskim, Moskwa . O Szklarskim pozostali autorzy piszą, że był wspaniałym matematykiem dydaktykiem, zginął walcząc w obronie swej ojczyzny z Niemcami, w pisaniu książki już udziału nie brał, jednak zostały użyte jego notatki, jego wkład w działalność kółka matematycznego dla uczniów szkół średnich przy Moskiewskim Uniwersytecie Państwowym im. M.Łomonosowa był bardzo duży, więc występuje na liście autorów tej i dwu innych książek z zadaniami jako pierwszy.