Ocenianie

Zadanie

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu
$W_n(x) = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \ldots + (2n-1)x^2 + 2nx$
określonego w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie uczestniczki OM — tekst jest przepisany z kartki praktycznie bez zmian, zachowany został styl autorki.

Dla $n \geqslant 2$ wielomian $W_n(x)$ można przedstawić w następujący sposób:

$$W_n(x) = x^2 W_{n-1}(x) + (2n-1)x^2 + 2nx \qquad (1).$$

Udowodnijmy, że $W_n(-1) = -n$.
$W_n(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2n - 1 - 2n =$
$(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) - (2 + 4 + \ldots + 2n) =$
$= \frac{1+2n-1}{2} \cdot n - \frac{2+2n}{2} \cdot n = n^2 - (1+n)n = -n.$

Udowodnijmy, że wielomian $W_n(x)$ przyjmuje wartości większe bądź równe $-n$.
$W_n(x) \geqslant -n$, $W_n(x) + n \geqslant 0$.
I Sprawdźmy, czy powyższa nierówność zachodzi dla $n = 1$.
$w_1(x) + 1 \geqslant 0$, $x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$, $(x+1)^2 \geqslant 0$.
II Załóżmy, że istnieje $k \in \mathbb{N}_+$, dla którego nierówność $W_k(x) + k \geqslant 0$ jest prawdziwa.
Sprawdźmy, czy prawdziwa jest również nierówność $W_{k+1}(x) + k + 1 \geqslant 0$.
Pod $W_{k+1}(x)$ podstawmy (1)
$x^2 W_k(x) + (2k + 2 - 1)x^2 + (2k+2)x + k + 1 \geqslant 0$
$x^2(W_k(x) + (2k+1)) + (2k+2)x + k + 1 \geqslant 0$
$\Delta = (2k+2)^2 - 4(W_k(x) + 2k + 1)(k+1)$
$\Delta = 4(k+1)(k + 1 - W_k(x) - 2k - 1)$
$\Delta = -4(k+1)(W_k(x) + k) \leqslant 0,$
bo $k + 1 \geqslant 0$ i $W_k(x) + k \geqslant 0$ — z założenia indukcyjnego, $\Delta \leqslant 0 \Longrightarrow$ nierówność $W_{k+1}(x) + k + 1 \geqslant 0$ jest prawdziwa.
z I oraz II , kroku indukcyjnego wynika, że wielomian $W_n(x)$ przyjmuje wartości większe bądź równe $-n$. (3).
Z (2) i (3) wynika, że minimalną wartością wielomianu $W_n(x)$ jest $-n$.

To rozwiązanie oceniono najpierw na 2 punkty, co oznacza „połowicznie rozwiązane”, a nastepnie po dyskusji ocena została podniesiona do 5 punktów, więc rozwiązanie uznano za pełne, za jedyny mankament uznano brak pełnej kontroli wyrażenia $W_k(x) + (2k+1)$ — należało wyraźnie napisać, że to wyrażenie nie zeruje się w żadnym punkcie, a takiego zdania w tekście nie ma, choć w istocie rzeczy dowód tego stwierdzenia jest — usterka jest więc n atury redakcyjnej a nie merytorycznej.

Zadanie sprzed wielu lat (≈ 1965) Udowodnić, że jeśli $x^3+2px+q=0$, to $xq \leqslant p^2$.

Rozwiązanie co najmniej dwóch uczniów i również takie jest w książce „Zadania z olimpiad matematycznych. tom IV”.

Jeśli $x \neq 0$, to ponieważ równanie $x \cdot x^2 + 2px + q = 0$ ma pierwiastek, więc
$0 \leqslant \Delta = 4p^2 - 4xq$, zatem $qx \leqslant p^2$. Dla $x = 0$ mamy $0 \cdot q = 0 \leqslant p^2$.

Jeszcze jedno rozwiązanie: Dla $x \neq 0$ mamy
$0 = x^3 + 2px + q = x(x + \frac{p}{x})^2 - \frac{p^2}{x} + q = x\left((x + \frac{p}{x})^2 - \frac{p^2-xq}{x^2}\right)$,
więc $(x+\frac{p}{x})^2 = \frac{p^2-xq}{x^2}$, zatem $p^2-xq \geqslant 0$, co mieliśmy udowodnić. Dla $x=0$ nierówność jest oczywista.

To rozwiązanie to oczywiście w rzeczywistości wyprowadzenie wzoru na pierwiastki równania kwadratowego bez nazywania rzeczy po imieniu.

Trzecie rozwiązanie. $p^2 - xq = p^2 - x(-x^3 - 2px) = (x^2 + p)^2 \geqslant 0$.