Niewymierność liczby π wg. Miklósa Laczkovicha

Udowodnimy, że liczba π jest niewymierna. Rozumowanie, które pokażę to przeróbka pierwszego dowodu niewymierności pochodzącego od niemieckiego matematyka Johanna Lamberta (1728 – 1777). Dowód skrócił i „wyczyścił" Miklós Laczkovicz z Budapesztu (The American Mathematical Monthly, vol. 104, No 5, May 1997, pp. 439–443), a jeszcze wcześniej Gauss i inni. Tekst poniżej to tłumaczenie pracy Laczkovicza z nieistotnymi zmianami. W rozumowaniu Lamberta nie było luk, to był pełny, poprawny dowód, ale to zrozumiano dopiero po kilkudziesięciu latach. Obecnie przedstawiane jest ono zwykle w obudowie dosyć odstraszającej na wejściu, bo autorzy powtarzają przekształcenia pochodzące od Gaussa, który badał szeregi hipergeometryczne, więc szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\cdot(a+1)\cdot\dots\cdot(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdot\dots\cdot(b+n-1)}{c(c+1)\cdot\dots\cdot(c+n-1)}\,\frac{z^n}{n!},$$

gdzie $a,b,c,z\in\mathbb{C}$. W tle są też ułamki łańcuchowe (continued fractions). Dwa przykłady:

$\sqrt{5}=2+(\sqrt{5}-2)=2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=2+\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}=2+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\dots}}$

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$

–pokazują one, że te ułamki nie są najlepsze do rachowania

Do dowodu niewymierności π J. Lambert użył rozwinięcia funkcji tangens w ułamek łańcuchowy, ale M. Laczkovich zauważył, że nie potrzeba aż tyle. Rozważać będziemy funkcje zdefiniowane dla $k\in\mathbb{Z}$ wzorem

$$f_k(x)=1-\frac{x^2}{2(2k-1)}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)}+\dots,\ \text{wtedy}$$
$$f_{k+1}(x)=1-\frac{x^2}{2(2k+1)}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)}-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)\cdot(2k+5)}+\dots\quad.$$

Z kryterium ilorazowego d'Alemberta wynika, że dla każdego $x\in\mathbb{C}$ szereg definiujący funkcję f_k jest bezwzględnie zbieżny . Te funkcje pojawiają się w trakcie rozwijania funkcji tangens w ułamek łańcuchowy.

$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2\cdot1}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot1\cdot3}-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot1\cdot3\cdot5}+\dots=1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot3\cdot2\cdot4}-\frac{x^6}{1\cdot3\cdot5\cdot2\cdot4\cdot6}+\dots=\cos x$, a także

$f_2(x)=1-\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot3\cdot5}-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7}+\dots=1-\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\dots=\frac{\sin x}{x}$.

Możemy napisać teraz równość $\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$, co może wyglądać dziwnie w pierwszej chwili, ale niebawem się okaże w czym rzecz. Zachodzą równości:

(U1) $$f_{k+1}(x)-f_k(x)=\frac{x^2}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{x^4}{2(2k-1)(2k+1)(2k+3)}+$$
$$+\frac{x^6}{2\cdot4(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)}-\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)}+\dots=$$
$$=\frac{x^2}{(2k-1)(2k+1)}\Big(1-\frac{x^2}{2(2k+3)}+\frac{x^4}{2\cdot4(2k+3)(2k+5)}-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6(2k+3)(2k+5)(2k+7)}+\dots\Big)=\frac{x^2}{(2k-1)(2k+1)}f_{k+2}(x).$$

Stąd otrzymujemy równość

(U2) $\quad 1-\frac{f_k(x)}{f_{k+1}(x)}=\frac{x^2}{(2k-1)(2k+1)}\cdot\frac{f_{k+2}(x)}{f_{k+1}(x)},\quad$ czyli: $\quad \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{(2k-1)(2k+1)}\cdot\frac{f_{k+2}(x)}{f_{k+1}(x)}}$.

Lemat 1. (łatwe zadanie)

Dla każdej liczby zespolonej x zachodzi równość $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=1$.

Dowód. Mamy $\left|\frac{x^{2n}}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2k-1)(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n-3)}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n}}{2^n n!(2k-1)^n}\leqslant\frac{C}{(2k-1)^n}$ dla pewnej liczby $C>0$, zależnej od x – taka liczba C istnieje, bo $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{2n}}{2^n n!}=0$. Z tej nierówności wynika łatwo, że $|f_k(x)-1|\leqslant\frac{C}{(2k-1)(1-\frac{1}{2k-1})}$ dla $k=1,2,\ldots$ – zsumowaliśmy szereg geometryczny. Stąd teza lematu wynika od razu. □

Przechodzimy do dowodu niewymierności π.

Lemat 2. (zasadnicza część rozumowania)

Jeśli $x\neq0$ i $x^2\in\mathbb{Q}$, to $f_k(x)\neq0$ i $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\notin\mathbb{Q}$ dla $k\in\mathbb{Z}$.

Dowód. Niech $x\neq0$ i $x^2\in\mathbb{Q}$ i niech $k\in\mathbb{Z}$. Z wzoru (U1) wynika, że jeśli dwa kolejne wyrazy ciągu (f_{k+n}) są zerami, to wszystkie następne też — indukcja. To jednak jest niemożliwe dla $x\neq0$, bo $\lim\limits_{n\to\infty} f_{k+n}(x)=1$.

Załóżmy, że $f_k(x)=0$ lub $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\in\mathbb{Q}$. Istnieją wtedy takie liczby całkowite a,b i taka liczba $y\neq0$, że $f_k(x)=ay$ oraz $f_{k+1}(x)=by$. Nie wykluczamy tego, że $a=0$ lub $b=0$.

Niech $q>0$ będzie taką liczbą naturalną, że $\frac{q}{2k-1},\frac{q}{x^2}\in\mathbb{Z}$. Niech $G_0(x)=f_k(x)$ oraz

$$G_n=\frac{q^n}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-3)}f_{k+n}(x)\quad\text{dla}\quad n=1,2,\ldots.$$

Z równości $f_{k+n+1}(x)-f_{k+n}(x)=\dfrac{x^2}{(2k+2n-1)(2k+2n+1)}f_{k+n+2}(x)$ wynika, że

$$x^2G_{n+2}=\frac{x^2q^{n+2}f_{k+n+2}(x)}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-1)(2k+2n+1)}=$$

$$=\frac{(2k+2n-1)q^{n+2}f_{k+n+1}(x)}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-1)}-\frac{q^{n+2}f_{k+n}(x)}{(2k-1)(2k+1)\ldots(2k+2n-3)}.$$

Mamy więc

(U3) $\quad G_{n+2}=\frac{(2k+2n-1)q}{x^2}G_{n+1}-q\cdot\frac{q}{x^2}G_n=(2k+2n-1)\frac{q}{x^2}G_{n+1}-\frac{q^2}{x^2}G_n$.

$G_0(x)=f_k(x)=ay$, $G_1(x)=\frac{q}{2k-1}f_{k+1}(x)=\frac{q}{2k-1}by$, współczynniki przy G_{n+1} i G_n we wzorze (U3) są całkowite, zatem wszystkie liczby w ciągu (G_n) są całkowitymi wielokrotnościami liczby $y\neq0$. Dla dostatecznie dużych n zachodzi $|f_{n+k}(x)-1|<1$, więc $f_{n+k}(x)\neq0$, zatem $G_n\neq0$. Ciąg całkowitych wielokrotności liczby y różnych od 0 nie jest zbieżny do 0, a oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty}G_n=0$. Doszliśmy do sprzeczności. Lemat został wykazany. □

Wniosek 1. $\quad\pi^2\notin Q$.

Dowód. Załóżmy, że $\pi^2 \in Q$. Mamy $f_1(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, wbrew lematowi 2. Zakończyliśmy dowód niewymierności π, a nawet π^2. $\square$

Wniosek 2. Jeśli $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, to $\operatorname{tg} x \notin Q$.

Dowód. Z lematu 2. zastosowanego dla $k = 1$ wynika, że liczba $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ nie jest wymierna, więc z wymierności mianownika wynika niewymierność licznika. $\square$

Zadanie 1.1 Udowodnić, że jeśli $\cos\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $NWD(p, q) = 1$ i $q \geqslant 3$, to $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

To zadanie pojawiło się dawno temu na zawodach II stopnia Olimpiady Matematycznej (z $p = 1$, $q = 3$), zresztą jest dosyć znane.Wskazówka: $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$. Studenci powinni z nim sobie poradzić. $\square$

Na koniec przedstawimy teraz funkcję tangens w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego. Ten fragment też pochodzi z przywołanej wcześniej pracy M. Laczkovicza. Zazwyczaj w dowodzie niewymierności liczby π rozwinięcia, które pojawią się niebawem, były wykorzystywane, ale M. Laczkovicz zdołał uprościć dowód i uniknąć ich użycia w rozumowaniu.

Skorzystamy wielokrotnie z równości (U2) (dla $k = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\operatorname{tg} x = x\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{f_3(x)}{f_2(x)}} = \frac{x}{1 - \frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1 - \frac{x^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{f_4(x)}{f_3(x)}}} = \frac{x}{1 - \frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1 - \frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1 - \frac{x^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{f_5(x)}{f_4(x)}}}} =$$

$$= \frac{x}{1 - \frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1 - \frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1 - \frac{\frac{x^2}{5\cdot 7}}{1 - \frac{x^2}{7\cdot 9}\cdot\frac{f_6(x)}{f_5(x)}}}}} = \frac{x}{1 - \frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1 - \frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1 - \frac{\frac{x^2}{5\cdot 7}}{1 - \frac{\frac{x^2}{7\cdot 9}}{1 - \frac{x^2}{9\cdot 11}\cdot\frac{f_7(x)}{f_6(x)}}}}}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \frac{x^2}{11 - x^2\cdot\frac{f_7(x)}{f_6(x)}}}}}}},$$

co wyraźnie sugeruje prawdziwość wzoru

$$\text{(U4)}\qquad \operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7\cdot(1 - \ldots)}}}} = \frac{x}{1 - \frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1 - \frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1 - \frac{\frac{x^2}{5\cdot 7}}{1 - \ldots}}}}.$$

Prawie wszystko zostało udowodnione poza zbieżnością ciągu, którego kolejnymi wyrazami są liczby x, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3}}$, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5}}}$, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{7}}}}$, $\ldots$, do liczby $\operatorname{tg} x$. Zachodzą oczywiste równości $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3}} = \frac{x}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}}$, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5}}} = \frac{x}{1-\frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1-\frac{x^2}{3\cdot 5}}}$, $\frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{7}}}} = \frac{x}{1-\frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1-\frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1-\frac{x^2}{5\cdot 7}}}}$. zatem możemy zajmować się ciągiem lewych lub prawych stron tych równości.

Niech $R_0(x)=x$, $R_1(x))=\frac{x}{1-\frac{x^2}{1\cdot 3}}$, $R_2(x)=\frac{x}{1-\frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1-\frac{x^2}{3\cdot 5}}}$, $R_3(x)=\frac{x}{1-\frac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1-\frac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1-\frac{x^2}{5\cdot 7}}}}$, ... Udowodnimy, że dla każdej liczby zespolonej x zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\operatorname{tg}x$.

Skorzystamy z następującego lematu (znów zadanie).

Lemat 3.

Jeśli $|b_i|\le\frac14$ dla $i=1,2,\ldots,n-1$ oraz $|b_n|\le\frac12$, to $\left|\frac{b_1}{1+\frac{b_2}{1+\frac{b_3}{1+\ddots_{1+\frac{b_{n-1}}{1+b_n}}}}}\right|\le\frac12$. $\square$

Jego dowód to banalna indukcja, więc go opuszczam. I jeszcze jeden fakcik, który się przyda.

Lemat 4.

Jeśli $|b_i|\le\frac14$ dla $i=1,2,\ldots,n$ oraz $|\delta|\le\frac14$, to

$$\left|\frac{b_1}{1+\frac{b_2}{1+\frac{b_3}{1+\ddots_{1+\frac{b_{n-1}}{1+b_n}}}}}-\frac{b_1}{1+\frac{b_2}{1+\frac{b_3}{1+\ddots_{1+\frac{b_{n-1}}{1+b_n+\delta}}}}}\right|\le|\delta|.\square$$

Znów opuszczam dowód indukcyjny lematu, choć to całkiem niezłe zadanie. W dalszym ciągu będziemy oznaczać ułamek $\frac{b_1}{1+\frac{b_2}{1+\frac{b_3}{1+\ddots_{1+\frac{b_{n-1}}{1+b_n}}}}}$ symbolem $[b_1,b_2,\ldots,b_n]$.

Z udowodnionego wcześniej wzoru (U2) wynika następująca równość

$$\frac{f_{n+2}(x)}{f_{n+1}(x)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{f_{n+3}(x)}{f_{n+2}(x)}}.$$

Z lematu 1 wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_{n+2}(x)}{f_{n+1}(x)}=1$. Istnieje więc taka liczba naturalna N, że jeśli $n\geqslant N$, to $\left|\frac{f_{n+2}(x)}{f_{n+1}(x)}-1\right|<1$ oraz $\frac{|x|^2}{(2n-1)(2n+1)}\le\frac14$.

Niech $P_n=\left[-\frac{x^2}{(2N+1)(2N+3)},-\frac{x^2}{(2N+3)(2N+5)},\ldots,-\frac{x^2}{(2n-1)(2n+1)}\right]$ oraz

$$Q_n=\left[-\frac{x^2}{(2N+1)(2N+3)},-\frac{x^2}{(2N+3)(2N+5)},\ldots,-\frac{x^2}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{f_{n+2}(x)}{f_{n+1}(x)}\right],$$

$$F_N(y)=\left[x,-\frac{x^2}{1\cdot 3},-\frac{x^2}{3\cdot 5},-\frac{x^2}{(2N-1)(2N+1)},y\right].$$

Funkcja F_N zmiennej y jest homografią, więc jest homeomorfizmem płaszczyzny domkniętej $\overline{\mathbb{C}}$ na siebie. Jasne jest, że $\operatorname{tg}(x)=F_N(Q_n)$ dla każdego $n>N$. Z lematu 2 wynika, że $|P_n - Q_n| \leq \left|\frac{f_{n+(3/2)}(x)}{f_{n+(1/2)}(x)} - 1\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, a stąd wynika, że

$$|R_n(x) - \operatorname{tg} x| = |F_N(P_n) - F_N(Q_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Zakończyliśmy dowód wzoru (U4). $\square$