Kilka słów o moich doświadczeniach z pracy z uczniami zdolnymi

Zacznę od swego pierwszego doświadczenia. W roku szkolnym 1974/75 zacząłem pierwszy raz uczyć w LO im. K.Gottwalda w Warszawie. Matematyka była podzielona (nadal tak jest) na geometrię i analizę (bywały jeszcze inne przedmioty: rachunek prawdopodobieństwa, topologia). Geometrii uczono wtedy aksjomatycznie, analizy też miało się tak uczyć. Miałem zerowe doświadczenia ale trochę instynktu samozachowawczego. Miałem uczyć teorii liczb rzeczywistych młodych ludzi od podstaw. Więc tak zacząłem. Początek to była aksjomatyka liczb naturalnych, potem konstruowałem liczby rzeczywiste. Młodzi ludzie dopiero dowiadywali się, co to jest dowód. Jakoś to szło, ale ciężko. Ta konstrukcja jest żmudna i czas potrzebny na to, aby dojść do twierdzeń, które niosą jakąś rzeczywistą treść, a nie tylko informację o formalistyce potrzebnej matematykowi do nabrania przekonania, że już wszystko jest całkiem w porządku jest bardzo długi.

Na szczęście nie poprzestałem na tych formalistycznych ćwiczeniach. Dawałem zadania spoza głównego nurtu, albo raczej uważanego wtedy przeze mnie za główny. Były to zadania, w których trzeba było pomyśleć trochę i otrzymać rozwiązanie. Młodzież te zadania jakoś robiła, oczywiście byli lepsi i gorsi, ale to przynajmniej było zrozumiałe. Jednak te zadania miały spore znaczenie. Przede wszystkim nie wszyscy do formalizmu potrafili się zapalić. Część z tych miała jednak okazję zademonstrować swe możliwości w tych zadaniach. Jako człowiek wtedy młody byłem pewien swych teorii, w szczególności po jakichś 2–3 miesiącach uparłem się w sprawie ucznia, którego chciano wyrzucić z klasy dla uzdolnionych tylko z tego powodu, że miał oceny niedostateczne ze wszystkich przedmiotów łącznie z moim. Przyczyna była prosta. Te zadania typu łamigłówki, w każdym razie nie pasujące do formalnego programu. Był w czołówce. Nie wyrzucono go. W czwartej LO był w finale OM, niektórzy nauczyciele innych przedmiotów dziwili się. Był dosyć leniwy, nie uczył się, ale myśleć czasem potrafił.

Jakie zadania pojawiały się w tych zestawach? Niektóre jeszcze pamiętam.

Zadanie 1. Ile razy trzeba łamać tabliczkę czekolady, aby połamać ją na wskazane przez producenta kawałki?

Zadanie 2. W pierwszej paczce jest dwa razy więcej zeszytów niż w drugiej. Po przełożeniu 16 zeszytów z pierwszej paczki do drugiej liczba zeszytów w obu paczkach jest taka sama. Ile zeszytów zawiera każda paczka.

Zadanie 3. Znaleźć, wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych, których suma jest równa ich iloczynowi.

Zadanie 4. Znaleźć, wszystkie takie trójki dodatnich liczb całkowitych, których suma jest równa ich iloczynowi.

Zadanie 5. Znaleźć, wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych, których różnica kwadratów jest równa 13.

Zadanie 6. Z liczby 123456789101112131415161718192021 . . . 979899100 należy wykreślić 100 cyfr w taki sposób, by liczba utworzona z pozostałych w niezmienionej kolejności była jak największa.

Zadanie 7. Jak długi mur może być postawiony na jednej cegle? Chodzi o to, że cegły mogą wystawać poza podstawę. Długość muru to długość jego rzutu na płaszczyznę.

Zadanie 8. Czy szachownicę z której wycięto dwa pola kończące jedną z przekątnych można pokryć klockami domino (jeden klocek pokrywa dwa pola).

Zadanie 9. Ile wzajemnie nieszachujących się skoczków można ustawić na szachownicy 8×8? .

Zadanie 10. Wykazać, że w sali, w której znajduje się wiele osób są co najmniej dwie o takiej samej liczbie znajomych. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A.

Zadanie 11. Ułożyć kwadrat z kwadratów o bokach 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81.

Zadanie 12. Wykazać, że sześcianu nie da się zbudować ze skończenie wielu parami różnych sześcianów.

Zadanie 13. Czy z cegieł o wymiarach $1 \times 2 \times 4$ można ułożyć sześcian o krawędzi 6?

Zadanie 14. Przy drodze w kształcie okręgu rozmieszczone są stacje benzynowe. W stacjach znajduje się benzyna w ilości wystarczającej (w sumie) do przejechania całej drogi. Udowodnić, że kierowca może tak wybrać stację, z której rozpocznie podróż, by przejechać całą drogę jadąc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, jeśli bak jego pojazdu może zawsze pomieścić **całe** paliwo, które znajduje się w stacji, do której podjechał.

Niech T_k oznacza zdanie: jeśli przy drodze rozmieszczonych jest k stacji benzynowych, w których znajduje się benzyna w ilości wystarczającej do przejechania całej drogi, to kierowca może tak wybrać stację, z której rozpocznie podróż, by przejechać całą drogę jadąc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.
1° Zdanie T_1 jest prawdziwe, bo wtedy w jedynej stacji znajduje się całe paliwo.
2° Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie T_k oraz, że przy drodze jest $k+1$ stacji, a w nich benzyna wystarczająca do przejechania całej drogi.
Niech S_1, S_2, … ,S_k,S_{k+1} oznaczają stacje, przy czym stacja S_2 znajduje się bezpośrednio po stacji S_1, stacja S_3 znajduje się bezpośrednio po stacji S_2 itd., stacja S_{k+1} — po stacji S_k.
Udowodnimy, że w pewnej stacji S_j jest dosyć benzyny do przejechania do następnej stacji (jeśli $j = k+1$, to następną stacją jest S_1). Załóżmy, że tak nie jest, tzn.:benzyny w stacji S_1 jest za mało, by dojechać do stacji S_2, w której jest za mało benzyny dla przejechania do stacji S_3 itd. w stacji S_{k+1} jest za mało benzyny do przejechania do

stacji S_1. Wtedy w stacjach S_1 i S_2 w sumie jest za mało benzyny do przejechania ze stacji S_1 do stacji S_3. W stacjach S_1, S_2, S_3 jest w sumie za mało benzyny do przejechania ze stacji S_1 do stacji S_4. Wobec tego we wszystkich stacjach jest za mało benzyny do przejechania ze stacji S_1 do stacji S_1, a to przeczy założeniu.
Możemy tak zmienić („obrócić") numerację stacji, by w stacji S_1 było dość paliwa do dojechania do stacji S_2. Załóżmy teraz, ze całą benzynę ze stacji S_2 przeniesiono do stacji S_1. Cała benzyna jest teraz w stacjach S_1, S_3, S_4, ... ,S_k, S_{k+1}, których jest k. Z założenia indukcyjnego wynika, że można przejechać całą drogę rozpoczynając podróż z pewnej stacji S_i. Wróćmy teraz do sytuacji pierwotnej, tzn. benzyna jest znów we wszystkich $k+1$ stacjach. Oczywiście ze stacji S_i możemy dojechać do stacji S_1 — dopóki do niej nie dojedziemy sytuacja jest taka sama, jak w przypadku pustej stacji S_2. Ze stacji S_1 zabieramy całe paliwo i to pozwala dojechać do stacji S_2. Z niej zabieramy całe paliwo i w tym miejscu drogi jesteśmy w takiej samej sytuacji, jak w przypadku pustej stacji S_2, więc możemy jechać dalej.
Z zasady indukcji zupełnej wynika, że kierowca zawsze może tak wybrać stację, z której wyruszy w podróż, że uda mu się całą drogę przejechać. ■

Zadanie 15. Na okręgu obrano $n > 2$ punktów i każdy połączono odcinkiem każdym innym. Czy można wykreślić te odcinki jednym ciągiem tak, by koniec pierwszego był początkiem drugiego, koniec drugiego — początkiem trzeciego itd. i żeby przy tym koniec ostatniego odcinka był początkiem pierwszego.

Zadanie 16. W każde z pól nieskończonej kraty kwadratowej wpisano liczbę naturalną w ten sposób, ze jeśli a, b, c, d są liczbami wpisanymi w pola przyległe do pola, na którym znalazła się liczba n, to $a + b + c + d \leqslant 4n$. Dowieść, że w każde pole wpisano tę samą liczbę naturalną. *Autorem tego zadania jest prof. dr hab. Maciej Skwarczyński.*

Zadanie 17. Na płaszczyźnie narysowano n prostych równoległych, a potem k prostych równoległych, ale nierównoległych do poprzednich n. Ile powstało równoległoboków, których boki leżą na tych prostych?

Zadanie 18. Jaka jest największa liczba punktów, które można umieścić w trójkącie równobocznym o boku 2 tak, by odległość dowolnych dwóch nie była mniejsza od 1.

Zadanie 19. Na okręgu danych jest 17 punktów. Każde dwa połączono odcinkiem niebieskim, zielonym lub żółtym. Dowieść, że istnieje trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

Zadanie 20. Udowodnić, że n prostych na płaszczyźnie, z których każde dwie mają punkt wspólny, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli tę płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$części.

Zadanie 21. Na dworze króla Artura zebrało się $2n$ rycerzy. Żaden z nich nie ma więcej niż $n - 1$ wrogów wśród nich. Udowodnić, że Merlin — doradca króla Artura — może ich rozsadzić przy Okrągłym Stole tak, by żaden nie był sąsiadem swego wroga.

Zadanie 22. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych, które z dzielenia przez 3 dają resztę 2.

Zadanie 23. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych, które z dzielenia przez 3 dają resztę 1.

Zadanie 24. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby $14^{14^{14}}$.

Zadanie 25. Udowodnić, że jeśli liczby p i $8p^2+1$ są pierwsze, to również liczba $8p^2-1$ jest pierwsza.

Zadanie 26. Ile zer ma na końcu liczba $1\,000\,000!$?

Zadanie 27. Udowodnić, że liczba $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ nie jest całkowita dla żadnej liczby naturalnej $n>1$.

Zadanie 28. Udowodnić, że jeśli $n \geqslant 3$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2-4}$ jest niewymierna.

Zadanie 29. Udowodnić, że $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=4$.

Zadanie 30. Udowodnić, że jeśli $n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2+3n}$ jest niewymierna.

Zadanie 31. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich trójek dodatnich liczb wymiernych x, y, z, że $x^2+y^2+z^2=1$.

Zadanie 32. Znaleźć wszystkie takie czwórki liczb całkowitych w, x, y, z, że zachodzi równość $w^4+2x^4=4(y^4+2z^4)$.

Zadanie 33. Udowodnić, że jeśli a i b są takimi liczbami całkowitymi, że $2a^2+a=3b^3+b$, to liczby $a-b$, $2a+2b+1$ i $3a+3b+1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 34. Niech $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$, itd., p_n jest n–tą liczbą pierwszą. Dowieść, że $p_n>3n$ dla $n \geqslant 12$.

Zadanie 35. Niech $\pi(n)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od liczby naturalnej n. Udowodnić, że $\pi(n) \leqslant \frac{n}{2}$ dla $n \geqslant 8$.

Zadanie 36. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n liczba 1000^n-1 jest podzielna przez 37.

Zadanie 37. Udowodnić, że 7 jest dzielnikiem liczby $2222^{5555}+5555^{2222}$.

Zadanie 38. Udowodnić, że 13 jest dzielnikiem liczby $1000^n+(-1)^n$ dla każdej liczby naturalnej n.