Kilka zadań z OM z pochodnymi w tle

Zacznę od przypomnienia najbardziej podstawowych twierdzeń.

Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją takie punkty $p,q \in [a,b]$, że dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność podwójna$f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q)$, czyli $f(p)$ jest najmniejszą wartością funkcji f, a $f(q)$ — największą. $\square$

Twierdzenie Fermata o znikaniu pochodnej

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, ma pochodną w punkcie $q \in (a,b)$ i $f(q)$ jest największą (lub najmniejszą) wartością funkcji f na przedziale $[a,b]$, to $f'(q) = 0$. $\square$

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, różniczkowalna w punktach przedziału (a,b), to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że

$$f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \square$$

Uwaga

Jeśli $f(b) = f(a)$, to $f'(c) = 0$ — w tym wypadku twierdzenie o wartości średniej zwane jest twierdzeniem Rolle'a.

Jeśli $f(x)$ interpretujemy jako położenie punktu materialnego w chwili x, to $f'(x)$ jest prędkością chwilową tego punktu w momencie x, można więc uznać, że twierdzenie Lagrange'a mówi średnia prędkość poruszającego się obiektu jest równa jego prędkości chwilowej w pewnym momencie c. $\square$

Zadanie z XV OM, (1963/64)

Dowieść, że jeśli wielomian $x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to wielomian $3x^2 + 2ax + b$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste.

Rozwiązanie pierwsze Niech $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Z twierdzenia Rolle'a wynika, że jeśli $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ i $x_1 < x_2 < x_3$, to istnieją takie punkty $c_1 \in (x_1, x_2)$ oraz $c_2 \in (x_2, x_3)$, że $f'(c_1) = 0 = f'(c_2)$. Są więc pierwiastkami wielomianu $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, co kończy dowód twierdzenia.

Rozwiązanie drugie Jeśli $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ i $x_1 < x_2 < x_3$, to dla każdego x zachodzi równość $x^3 + ax^2 + bx + c = f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$, zatem $a = -(x_1+x_2+x_3)$, $b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ i $c = -x_1x_2x_3$. Stąd mamy

$4a^2 - 12b = 4\big((x_1+x_2+x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\big) =$

$= 4\big((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1) - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\big) =$

$= 4\big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1)\big) =$

$= \frac{1}{2}\big((x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2 > 0$, więc wielomian kwadratowy ma dodatni wyróżnik, więc ma pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie z XXX OM, (1978/79)

Wielomian w stopnia $n > 1$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych: x_1, x_2,..., x_n. Dowieść, że $\frac{1}{w'(x_1)} + \frac{1}{w'(x_2)} + \frac{1}{w'(x_3)} + \ldots + \frac{1}{w'(x_n)} = 0$.

Rozwiązanie Istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $w(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$. Z wzoru na pochodną iloczynu wynika, że

$$w'(x) = a(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) + a(x - x_1)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) + \ldots + \\ + a(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Z tej równości wynika, że

$$w'(x_j) = a(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot (x_j - x_{j+2}) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_n).$$

Niech $v_j(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot (x - x_{j+2}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$. Wtedy $v_j(x_j) = w'(x_j)$. Niech

$$v(x) = \frac{v_1(x)}{v_1(x_1)} + \frac{v_2(x)}{v_2(x_2)} + \ldots + \frac{v_n(x)}{v_n(x_n)} - 1\,.$$

Stopień wielomianu v nie przekracza liczby $n-1$, bo stopień każdego ze składników jest właśnie tyle równy. Mamy też $v(x_j) = 0$. Wobec tego liczba pierwiastków wielomianu v jest równa n, więc jest większa od jego stopnia, a to oznacza, że jest to wielomian zerowy. W szczególności współczynnik tego wielomianu przy x^{n-1} jest równy 0, współczynnikiem tym jest liczba

$$\frac{a}{v_1(x_1)} + \frac{a}{v_2(x_2)} + \ldots + \frac{a}{v_n(x_n)}\,.$$

Stąd i z nierówności $a \neq 0$ teza wynika od razu. $\square$

Zadanie z XXXVII OM, (1985/86)

Wyznaczyć te liczby całkowite nieujemne n, dla których istnieje taki wielomian f stopnia n o współczynnikach rzeczywistych, że $f(x) > f'(x)$ dla każdego rzeczywistego x.

Rozwiązanie Wielomian f nie może być wielomianem zerowym. Zauważmy, że stopień f' jest o 1 mniejszy od stopnia f, więc stopień wielomianu g zdefiniowanego wzorem $g(x) = f(x) - f'(x)$ jest równy n. Jeśli stopień wielomianu g jest liczbą nieparzystą, to albo $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ albo $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, więc zawsze przyjmuje on wartości ujemne. Wynika stąd, że g, więc również f, musi być wielomianem parzystego stopnia.

Niech $\tilde{f}(x) = x^n$. Wtedy $\tilde{f}'(x) = nx^{n-1}$. Nierówność $\tilde{f}(x) > \tilde{f}'(x)$ zachodzi dla każdego $x < 0$ — pochodna jest ujemna, a funkcja dodatnia, więc wystarczy zajmować liczbami $x \geqslant 0$. Nierówność $x^n > nx^{n-1}$ zachodzi dla $x > n$. Największą wartością funkcji $\tilde{f}'(x) = nx^{n-1}$ na przedziale $[0, n]$ jest n^n. Przyjmujemy $f(x) = \tilde{f}(x) + n^n$. Oczywiście

$f'(x) = \tilde{f}'(x)$ dla każdego x, więc nierówność $f(x) > f'(x)$ zachodzi każdego $x \in \mathbb{R}$. Udowodniliśmy, że funkcja o żądanej własności istnieje dla każdego parzystego n i nie istnieje dla nieparzystych n. $\square$

Zadanie z XXIII OM, (1971/72)
Dowieść, że istnieje taki wielomian $P(x)$, o współczynnikach całkowitych, że dla każdej liczby $x \in \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)$ zachodzi nierówność $|P(x) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{1000}$.
Rozwiązanie Niech $W(x) = 2x(1-x)$. Wtedy $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $W(\frac{9}{10}) = W(\frac{1}{10}) = \frac{9}{50} > \frac{1}{10}$. Jeśli $0 < x < \frac{1}{2}$, to $x < W(x) < \frac{1}{2}$. Na przedziale $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ wielomian W jest funkcją ściśle rosnącą. Jeśli $\frac{1}{10} \leqslant x \leqslant \frac{9}{10}$, to $\frac{9}{50} \leqslant W(x) \leqslant \frac{1}{2}$. Wynika stąd, że jeśli $a_1 = \frac{1}{10}$ oraz $a_{n+1} = W(a_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to ciąg (a_n) jest ściśle rosnący, ograniczony z góry przez $\frac{1}{2}$. Ma więc granicę $g \in \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right]$. Z ciągłości wielomianu W wynika, że
$$2g(1-g) = W(g) = W(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} W(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g,$$
więc $2(1-g) = 1$ (bo $g \neq 0$), zatem $g = \frac{1}{2}$. Stąd wynika, że istnieje taka liczba naturalna k, że dla każdego $n \geqslant k$ zachodzi nierówność $\frac{1}{2} - \frac{1}{1000} < a_n$. Przyjmujemy $P(x) = \underbrace{W(W\ldots(W}_{\text{k liter W}}(x)\ldots))$. Z wymienionych wcześniej własności wielomianu W wynika od razu, że jeśli $x \in \left[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right]$, to $P(x) \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right]$. Oczywiście funkcja P jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. $\square$
Uwaga: W ostatnim zadaniu słowo pochodna nie występuje w ogóle. Jednak ma ono pewien związek z pochodnymi. Pochodna mierzy szybkość zmian funkcji. Wielomian $W(x) = 2x(1-x)$ ma punkt stały: $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Mamy też $W'(\frac{1}{2}) = 0$. W pobliżu[1] punktu $\frac{1}{2}$ pochodna jest więc bliska zeru. Wynika stąd, że punkt $\frac{1}{2}$ przyciąga do siebie i to bardzo skutecznie punkty znajdujące się w pobliżu: $f(x) - f(\frac{1}{2}) = f'(c_x)(x - \frac{1}{2})$ — istnienie odpowiedniego punktu c_x znajdującego się między liczbami x oraz $\frac{1}{2}$ wynika bezpośrednio z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Ponieważ $f'(c_x)$ jest liczbą niewiele różną od $f'(\frac{1}{2}) = 0$, więc liczba $f(x) - f(\frac{1}{2})$ stanowi niewielką część liczby $x - \frac{1}{2}$, co nadaje sens sformułowaniu: *punkt $\frac{1}{2}$ przyciąga do siebie i to bardzo skutecznie punkty znajdujące się w pobliżu.* Postawmy kropkę nad i: odległość punktu $f(x)$ od punktu $\frac{1}{2}$ jest znacznie mniejsza od odległości punktu x od punktu $\frac{1}{2}$. Liczba 0 jest też punktem stałym wielomianu W, ale ten punkt stały odpycha od siebie punkty znajdujące się w pobliżu, bo $W'(0) = 2 > 1$ — odległość od 0 wzrasta niemal dwukrotnie, czyli odległość punktu $W(x)$ od punktu $\frac{1}{2}$ jest prawie 2 razy większa od odległości punktu x od punktu $\frac{1}{2}$. $\square$

[1] Nie piszemy, co oznacza „w pobliżu”. Gdybyśmy chcieli to sprecyzować, użylibyśmy języka epsilonów, delt itp.