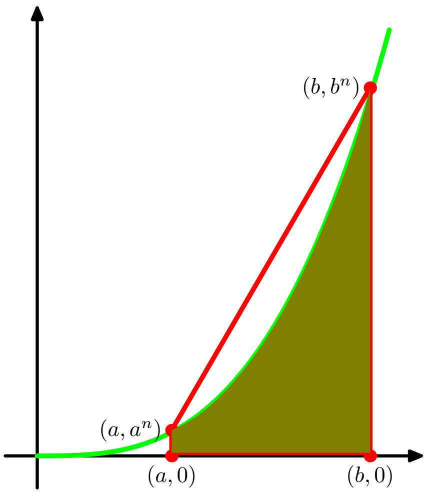
Dwa słowa o zadaniu M1360

W „Delcie" nr 9 z 2012 r. pojawiło się zadanie: *Udowodnić, że dla różnych liczb dodatnich* a, b *i liczby całkowitej* $n > 1$ *zachodzi nierówność*

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Jest też tam dowód nierówności. Chciałbym dodać uzasadnienie geometryczne, czy też wyjaśnić jej znaczenie geometryczne.

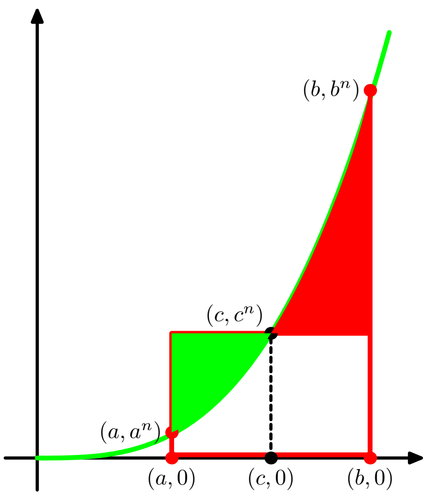
Przepiszmy nierówność sw postaci $\frac{1}{n+1} \cdot (b^{n+1} - a^{n+1}) < \frac{1}{2} \cdot (b-a)(a^n + b^n)$.



Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że $a < b$. Otóż prawa strona to pole trapezu o podstawach a^n, b^n i wysokości $b-a$. Lewa to (zgniłozielone) pole pod wykresem funkcji x^n ograniczonej do przedziału $[a, b]$. Ponieważ funkcja x^n na półprostej $[0, \infty)$ jest ściśle wypukła, więc jej wykres znajduje się pod dowolną cięciwą, a to oznacza, że obszar pod wykresem jest zawarty w trapezie o wierzchołkach $(a, 0)$, $(b, 0)$, (b, b^n) i (a, a^n). No i co tu dowodzić?

Po rozwiązaniu podanym w miesięczniku jest uwaga o nierówności

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt[n]{\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}} \quad \text{równoważnej} \quad \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} > (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$



Niech $c = \frac{a+b}{2}$. Tym razem pole pod wykresem funkcji x^n ma okazać się większe od pola prostokąta o podstawie $b-a$ i wysokości $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n = c^n$. Wynika to z tego, że jeśli $0 < h < c$, to

$$c^n - (c-h)^n < (c+h)^n - c^n, \qquad \text{(W)}$$

co jest równoważne nierówności

$$c^n < \frac{1}{2}\left((c+h)^n + (c-h)^n\right),$$

więc wynikającej natychmiast ze ścisłej wypukłości funkcji x^n. Z nierówności (W) wynika od razu, że symetria względem punktu (c, c^n) przekształca obszar zielony na zbiór zawarty w obszarze czerwonym, ale nie wypełniający obszaru czerwonego.

Wypukłość funkcji x^n na półprostej $[0,\infty)$ można wywnioskować z tego, że jej pochodna, czyli nx^{n-1}, jest ściśle rosnąca na $[0,\infty)$ lub — jeśli ktoś nie lubi pochodnych — z ciągłości funkcji x^n i nierówności $\frac{1}{2}(x^n+y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ prawdziwej dla różnych liczb dodatnich x, y. Można ją dowieść indukcyjnie. Krok indukcyjny polega na pomnożeniu obu stron nierówności $\frac{1}{2}(x^n+y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ przez liczbę dodatnią $\frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{x^n+y^n}$ i stwierdzeniu, że $(x^{n+1}+y^{n+1})\left(\frac{x+y}{2}\right)^n > (x^n+y^n)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1}$, czyli $2(x^{n+1}+y^{n+1}) > (x^n+y^n)(x+y)$. Ostatnia nierówność jest równoważna takiej $(x^n-y^n)(x-y) > 0$, prawdziwej w oczywisty sposób.