Suma nieskończona – co to jest?

Michał KRYCH[*]

W różnych sytuacjach pojawiają się sumy nieskończenie wielu składników. Już w szkołach podstawowych pojawiają się obiekty typu $7132{,}32323232323\ldots$ Należy, oczywiście, rozumieć, że chodzi o liczbę

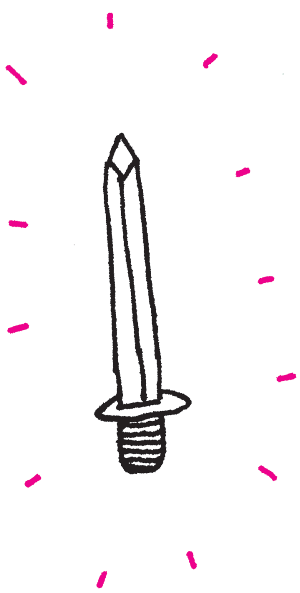
$$7130 + 2{,}3 + 0{,}023 + 0{,}00023 + 0{,}0000023 + \ldots$$

Oznaczając $x = 2{,}3 + 0{,}023 + 0{,}00023 + 0{,}0000023 + \ldots$, otrzymujemy równość $x = 2{,}3 + \frac{x}{100}$, z której wnioskujemy, że $x = \frac{2{,}3}{0{,}99} = \frac{230}{99} = 2\frac{32}{99}$, zatem $7132{,}32323232323\ldots = 7132\frac{32}{99}$. Rozumowanie to możemy uogólnić. Obliczmy sumę $S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$ – w podanym wcześniej przykładzie było $a = 2{,}3$ oraz $q = \frac{1}{100}$. Mamy

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = a + q(a + aq + aq^2 + \ldots) = a + qS,$$

więc jeśli tylko $q \neq 1$, to $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = S = \frac{a}{1-q}$. Podstawiając $a = 1$, $q = -1$, otrzymujemy równość

Zmarły ojciec zostawił Janowi i Józefowi w spadku jeden cudowny miecz. Ustalili, że w pierwszym roku miecz będzie u Jana, w drugim u Józefa, w trzecim znów u Jana itd. W ten sposób podzielili spadek na pół. Taka bajeczka miała w XVIII w. przemawiać za słusznością wzoru (\$).



$$(\$)\qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Jednak mamy też

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

oraz

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

Wobec tego $\frac{1}{2} = 0 = 1$, co nawet absolwentom współczesnych szkół może wydać się podejrzane.

Tylko nieliczni zakwestionowaliby równość

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15}\ldots =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots$$

W końcu po obu stronach równości występują te same liczby, co prawda kolejność składników jest inna, ale są to te same składniki. Jednak zachodzą „oczywiste” równości

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots\right) -$$
$$- \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots\right) =$$
$$= \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots\right) -$$
$$- \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \ldots\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots\right).$$

Z tych równości wynika od razu, że

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots =$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots\right),$$

co wygląda źle, bo zachodzi oczywista nierówność

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \ldots >$$
$$> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

– w każdym nawiasie jest liczba dodatnia, a po pomnożeniu liczby dodatniej przez 2 otrzymujemy liczbę większą od wyjściowej!

[*]Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Jasne też jest, że

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots<$$
$$<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+$$
$$+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots=1,$$

więc suma

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots$$

jest liczbą z przedziału $\left(\frac{1}{2},1\right)$, zatem nie uratuje nas ani równość $2\cdot 0=0$, ani $2\cdot\infty=\infty$.

Takich rozumowań, prowadzących do wyników sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem, można podać dowolnie wiele. Po to, by móc porozumiewać się i mieć szanse na poprawne rozumowania, trzeba zdefiniować sumę nieskończoną. Potem trzeba się zastanowić nad własnościami działań w nowej sytuacji.

Sumą nieskończoną, czyli sumą szeregu o wyrazach $a_0, a_1, a_2, \ldots$, nazywamy granicę $\lim_{n\to\infty} s_n$ ciągu sum częściowych, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n): $s_0=a_0$, $s_1=a_0+a_1$, $s_2=a_0+a_1+a_2, \ldots$

Niels Abel (1802–1829): *Z wyjątkiem szeregu geometrycznego nie istnieje w matematyce ani jeden szereg, którego sumę można dokładnie zdefiniować.* Cóż, świat się powoli zmienia...

Jeśli suma szeregu jest skończona, to mówimy, że szereg jest **zbieżny**. Jeśli suma szeregu jest nieskończona lub jeśli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to mówimy o szeregu **rozbieżnym**. Jeśli szereg ma sumę, skończoną lub nieskończoną, to oznaczamy ją symbolem

$$a_0+a_1+a_2+\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

W świetle tej definicji suma $1-1+1-1+1-1+\ldots$ po prostu nie istnieje, bo ciąg sum częściowych wygląda tak: $1,0,1,0,1,0,\ldots$, więc nie ma granicy. Podobnie nie jest prawdą, że $1+2+4+8+16+\ldots=\frac{1}{1-2}=-1$, bo w „wyprowadzeniu” wzoru $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots=\frac{a}{1-q}$ traktowaliśmy sumę $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots$ jak liczbę, a ta suma jest równa $+\infty$ – po drodze odejmowaliśmy $+\infty$ od $+\infty$, a tego działania sensownie zdefiniować nie sposób.

Suma

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots$$

jest dobrze zdefiniowana, co łatwo można wykazać:

$$1-\frac{1}{2}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}<$$
$$<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}<\ldots,$$

więc ciąg „parzystych” sum częściowych jest rosnący, podobnie

$$1>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>\ldots,$$

więc ciąg „nieparzystych” sum częściowych maleje, a ich różnica dąży do zera, zatem oba mają tę samą granicę, wobec tego skończoną. Pokazaliśmy wcześniej, że zmiana kolejności składników tej sumy może prowadzić do dwukrotnego zmniejszenia jej wartości.

Czytelnikowi proponujemy udowodnienie równości

$$\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots\right)=$$
$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\ldots$$

– znów po obydwu stronach równości są te same liczby, ale w innej kolejności.

Z nierówności $1+\frac{1}{2}>2\cdot\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}>2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ itd. wynika, że gdyby suma

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

była skończona, to byłaby większa od siebie, a to nie jest możliwe, wobec tego

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots=\infty.$$

Stąd wynika, że również

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\right)=\frac{\infty}{2}=\infty,$$

a zatem $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots=\infty$, bowiem $1>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$, itd.

Niech A będzie dowolną liczbą. Zmienimy kolejność składników sumy

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots,$$

tak by po tym przekształceniu sumą stała się liczba A. Niech m_1 oznacza taką najmniejszą liczbę naturalną, że zachodzi nierówność

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2m_1-1}\geqslant A.$$

Przez n_1 oznaczamy taką najmniejszą liczbę naturalną, że

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2m_1-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2n_1}\leqslant A.$$

Przyjmijmy, że m_2 jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2m_1-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2m_1+1}+\frac{1}{2m_1+3}+\ldots+\frac{1}{2m_2-1}\geqslant A$$

i jednocześnie $m_2>m_1$. Potem określamy n_2 jako najmniejszą z tych liczb naturalnych, dla których

$$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m_1-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2m_1+1}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2m_2-1}-\frac{1}{2(n_1+1)}-\frac{1}{2(n_1+2)}-\ldots-\frac{1}{2n_2}\leqslant A$$

i jednocześnie $n_2>n_1$. Definiujemy w taki sposób dwa ściśle monotoniczne ciągi liczb naturalnych (m_j) i (n_j) oraz nowy szereg nieskończony, różniący się od sumy $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ jedynie kolejnością składników. Niech S_n oznacza n-tą sumę częściową nowego szeregu. Jasne jest, że

$$A-\frac{1}{2n_1}\leqslant S_{m_1+n_1}\leqslant A,$$
$$A\leqslant S_{m_1+n_1+m_2}<A+\frac{1}{2m_2-1},$$
$$A-\frac{1}{2n_2}<S_{m_1+n_1+m_2+n_2}\leqslant A\quad\text{itd.}$$

Dla $A=2$ początek wygląda tak:
$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{2}+$$
$$+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{39}+\frac{1}{41}-\frac{1}{4},$$
więc $m_1=8$, $n_1=1$, $m_2=21$, $n_2=2$.

Spacerujemy wokół punktu A, po przekroczeniu go natychmiast zawracamy w przeciwną stronę. Wyrazy szeregu to długości kolejnych kroczków.

Pozostałe sumy częściowe znajdują się między pojawiającymi się w tych nierównościach. Wynika stąd, że $A=\lim_{n\to\infty}S_n$. Wykazaliśmy więc, że zmiana kolejności sumowania może spowodować w zasadzie dowolną zmianę sumy.

Czytelnik może zmodyfikować to rozumowanie, tak by nowa suma była równa ∞ lub $-\infty$. Może też doprowadzić do tego, by po zmianie kolejności składników ciąg (S_n) w ogóle granicy nie miał.

Bernhard Riemann, jeden z najwybitniejszych matematyków wszech czasów, zaobserwował, że jeśli suma $a_0+a_1+a_2+\ldots$ ma skończoną wartość i jednocześnie $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\ldots=+\infty$, to można zmienić kolejność wyrazów szeregu, tak by suma stała się równa z góry danej liczbie rzeczywistej A. Podane wyżej rozumowanie po kosmetycznych zmianach staje się dowodem tego twierdzenia.

Dodajmy na koniec, że wzór $1+2+4+8+16+\ldots=\frac{1}{1-2}=-1$, z pozoru absurdalny, może mieć jednak pewien sens. Możemy napisać równość

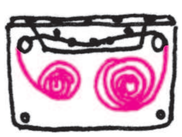
$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-a)-(z-a)}=\frac{1}{1-a}\left(1+\frac{z-a}{1-a}+\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^2+\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^3+\ldots\right),$$

która zachodzi dla każdej liczby zespolonej z, dla której spełniona jest nierówność $\left|\frac{z-a}{1-a}\right|<1$; litera a też oznacza liczbę zespoloną. Przyjmując kolejno $a=0$, $a=i$, $a=\frac{5}{4}+i$, $a=\frac{9}{4}+i$, otrzymujemy koła otwarte o środkach w wymienionych punktach i promieniach $|1-a|$, czyli 1, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{17}$, $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{41}$. Każde dwa kolejne mają punkty wspólne, a ostatnie zawiera liczbę $z=2$. Funkcja $\frac{1}{1-z}$ jest więc przedstawiana różnymi wzorami w kolejnych kołach. Można więc myśleć, że $1+2+4+8+16+\ldots=\frac{1}{1-2}$ to wartość funkcji, która w kole opisanym nierównością $|z|<1$ jest zdefiniowana jako $1+z+z^2+\ldots$, przedłużonej w rozsądny sposób poza to koło, tak że liczba 2 znajduje się w dziedzinie tego przedłużenia. W tym przypadku wyglądać może to na udziwnianie, ale w innych sytuacjach bywa inaczej: dany jest szereg i nie wiadomo, jaką funkcję przedstawia – to prowadzi do pojęcia funkcji analitycznej, zresztą na ogół wielowartościowej. Pisał o tym już Leonhard Euler (1707–1783), ale precyzyjne definicje pojawiły się po ponad stu latach.

Zadania

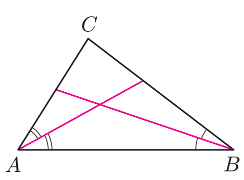
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 805. Po odsłuchaniu zapisu na taśmie magnetofonowej okazało się, że promień nawiniętej taśmy zmniejszył się dwukrotnie w czasie $t_1=20$ minut. Po jakim dodatkowym czasie t_2 promień nawiniętej taśmy zmniejszy się znowu dwukrotnie?
Rozwiązanie na str. 10



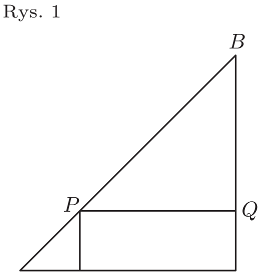
F 806. Na pustą szpulę starego magnetofonu, obracającą się ze stałą prędkością kątową, nawija się taśma magnetyczna. Po zakończeniu nawijania w czasie t_1 okazało się, że promień nawiniętej taśmy r_k jest trzy razy większy od początkowego promienia r_0. W jakim czasie można nawinąć na tę samą szpulę taśmę magnetyczną takiej samej długości, ale dwa razy cieńszą?
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Tomasz TKOCZ



Rys. 1

M 1339. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma większą miarę niż kąt przy wierzchołku B (rys. 1). Wykazać, że dwusieczna poprowadzona z wierzchołka B jest dłuższa niż dwusieczna poprowadzona z wierzchołka A.
Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

M 1340. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC wybrano punkt P. Niech Q i R będą rzutami prostokątnymi punktu P na boki BC i CA (rys. 2). Udowodnić, że pole którejś z figur ARP, PQB, $PRCQ$ stanowi co najmniej $\frac{4}{9}$ pola trójkąta ABC.
Rozwiązanie na str. 24

M 1341. Dane są liczby rzeczywiste a,b,c,d, takie że $b<c<d$. Udowodnić nierówność

$$(a+b+c+d)^2>8(ac+bd).$$

Rozwiązanie na str. 11