Trójkąty pitagorejskie, równanie Pella i jedno zadanie z XVI Olimpiady Matematycznej

Wszyscy, którzy mieli do czynienia ze szkołą ponadpodstawową słyszeli niewątpliwie określenie *twierdzenie Pitagorasa*. To twierdzenie było odkryte w wielu różnych miejscach przez różnych ludzi. Jest ono do dziś stosowane, bo tym budowniczym, którzy zdają sobie sprawę z tego, że czasem warto zadbać o to, by ściany budynku były prostopadłe potrzebna metoda wyznaczania kąta prostego w terenie. Mierzenie kątów wymaga specjalnych przyrządów, a mierzenie odcinków tylko miarki. Łatwiej jest mierzyć długość odcinka niż kąt — oczywiście nie ma to znaczenia, gdy budynek jest budowany przez wielką firmę, która ma wszelkie potrzebne przyrządy i ludzi, którzy potrafią się z nimi obchodzić. Jednak wiele obiektów budowanych jest przez małe firmy lub nawet przez pojedyncze osoby i wtedy ilość sprzętu bywa ograniczona.

Do wyznaczania kątów używany jest wtedy trójkąt egipski, tj. trójkąt o bokach 3, 4 i 5. Jest on prostokątny, bo $3^2+4^2=5^2$, a – jak wiadomo – kąt między bokami a i b w trójkącie o bokach a, b i c jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $c^2=a^2+b^2$. Ten trójkąt jest najbardziej popularny, bo każdy może spamiętać jego boki bez trudu, a po narysowaniu na kartce papieru lub na piasku widać od razu, który kąt jest prosty. Można jednak zapytać, czy nie ma innych trójkątów o bokach całkowitych (więc łatwych do odmierzenia) i o dobrym kształcie, np. prawie równoramiennych. Możemy zapytać np. o trójkąty o przyprostokątnych różniących się o dokładnie 1. Miałaby więc być spełniona równość

$$a^2+(a+1)^2=c^2\,.$$

Traktując a w równaniu $0=2a^2+2a+1-c^2=2(a+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-c^2$ jako niewiadomą, a c jako znany parametr, otrzymujemy $(a+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}(2c^2-1)$, więc $a=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{2c^2-1}\,)$. Myśląc o bokach trójkąta musimy przyjmować, że $a>0$, więc $a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2c^2-1}\,)$. Jeśli a ma być liczbą całkowitą, to również liczba $d=\sqrt{2c^2-1}$ powinna być całkowita, a to oznacza, że powinna być spełniona równość $2c^2=d^2+1$. Jasne jest, że wtedy powinna być spełniona przybliżona równość $\frac{d}{c}\approx\sqrt{2}$ przynajmniej wtedy, gdy liczby d,c są „duże”.

Mamy

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$

Tę procedurę można powtarzać wielokrotnie. Prowadzi ona do coraz dłuższych ułamków o coraz większej liczbie pięter. Powstające ułamki zwane są łańcuchowymi. Wypiszmy kilka początkowych.

$1\,,\; 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,,\; 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\,,\; 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}\,,\; 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}\,,\; 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}=\frac{99}{70}\,.$

Kontynuując otrzymamy następne ułamki: $\frac{239}{169}\,,\ \frac{577}{408}\,,\ \frac{1393}{985}\,,\ \frac{3363}{2738}\,.$

Bez trudu stwierdzamy,[1] że $2\cdot 5^2=7^2+1\,,\ 2\cdot 29^2=41^2+1\,,\ 2\cdot 169^2=239^2+1\,,$ $2\cdot 985^2=1393^2+1\,.$

Przyjrzawszy się nieco kolejnym ułamkom:

$$\frac{1}{1}\,,\quad \frac{3}{2}\,,\quad \frac{7}{5}\,,\quad \frac{17}{12}\,,\quad \frac{41}{29}\,,\quad \frac{99}{70}\,,\quad \frac{239}{169}\,,\quad \frac{577}{408}\,,\quad \frac{1393}{985}\,,\quad \frac{3363}{2738}$$

możemy zauważyć, że mianownik ułamka jest sumą licznika i mianownika swego poprzednika (np. $12=7+5$), licznik to suma mianownika i poprzedniego mianownika (np. $17=12+5$). Oczywiście ta obserwacja bez uzasadnienia pozwala jedynie na sformułowanie **hipotezy**, że tak jest również w następnych przypadkach. Potem można udowodnić, że tak jest. Nie zrobimy tego, choć to nietrudne.

Załóżmy, że $2c^2=d^2+1$ (myślimy o ułamku $\frac{d}{c}$, więc następnym byłby ułamek $\frac{d+2c}{c+d}$, a po nim ułamek $\frac{3d+4c}{2d+3c}$). Wtedy

$$2(2d+3c)^2=8d^2+24dc+18c^2=8d^2+24dc+16c^2+2c^2=$$
$$=8d^2+24dc+16c^2+d^2+1=9d^2+24dc+16c^2+1=(3d+4c)^2+1\,.$$

Wykazaliśmy, że jeśli dla pewnej pary liczb (d,c) zachodzi równość $2c^2=d^2+1$, to zachodzi ona też dla pary $(3d+4c,2d+3c)$. Wobec tego teraz już wiemy, że z pary $(1,1)$ powstaje para $(7,5)$, z niej — para $(41,29)$, z tej z kolei — $(239,169)$, itd.

Załóżmy, że d,c są takimi liczbami całkowitymi, że $2c^2=d^2+1$. Przyjmując

$$a=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{2c^2-1}\,)=\tfrac{1}{2}(-1+d)\quad \text{i}\quad b=a+1=\tfrac{1}{2}(1+d)$$

otrzymujemy równość $c^2=a^2+b^2$. Liczby a,b można więc traktować jako przyprostokątne trójkąta, a liczbę c — jako jego przeciwprostokątną. Dodajmy, że z równości $2c^2=d^2+1$ wynika, że liczba d jest nieparzysta, więc liczby a,b,c są całkowite.

Uwaga 1. Z formalnego punktu widzenia cała opowieść o równościach postaci

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$

jest zbędna. Ale jak bez niej można wpaść na pomysł tworzenia z pary liczb (p,q) następnej pary $(3p+4q,2p+3q)$?

Dodajmy jeszcze, że ułamki postaci $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ nazywane są łańcuchowymi (ang. continued fractions). Można napisać równość

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}\,,$$

w której występuje nieskończony ułamek łańcuchowy. Otrzymane wyżej ułamki

$$\frac{1}{1}\,,\quad \frac{3}{2}\,,\quad \frac{7}{5}\,,\quad \frac{17}{12}\,,\quad \frac{41}{29}\,,\quad \frac{99}{70}\,,\quad \frac{239}{169}\,,\quad \frac{577}{408}\,,\quad \frac{1393}{985}\,,\quad \frac{3363}{2738}$$

to kolejne „najlepsze” przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ w tym znaczeniu, że np. spośród ułamków o całkowitych licznikach i mianownikach nie przekraczający liczb 169 najbliżej liczby

[1] np. $29^2=(30-1)^2=900-60+1=841\,,\ \ 41^2=(40+1)^2=1600+80+1=1681\,.$

$\sqrt{2}$ leży $\frac{239}{169}$. Oczywiście należałoby udowodnić odpowiednie twierdzenie, ale tego tu nie zrobimy. ■

Uwaga 2. Niech $2x^2 = y^2+1$. Przyjmijmy $x = 2d+3c$, $y = 3d+4c$. Wtedy $3x-2y = c$, $3y-4x = d$. Można sprawdzić, że jeśli $2x^2 = y^2+1$, to również $2c^2 = d^2+1$. Oznacza to, że opisana wcześniej procedura tworzenia następnej interesującej nas pary jest odwracalna. Co więcej, jeśli $x, y > 0$ i $2x^2 = y^2+1$, to $y^2 < 2x^2$, więc $\frac{y}{x} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, więc $c = 3x-2y > 0$. Mamy też wtedy $3x-2y = x+2(x-y) < x$, gdy $x > 1$ (gdy $x = 1$, to $y = 1$ i wtedy $c = 1$). Oznacza to, że przypisując parze liczb dodatnich (y, x) spełniających równanie $2x^2 = y^2+1$ parę $(d, c) = (3y-4x, 3x-2y)$ otrzymujemy parę, dla której $2c^2 = d^2+1$, przy czym $0 < c < x$. Czytelnik sprawdzi, że wtedy d też jest dodatnie. Można z tych zdań wywnioskować, że opisana procedura przed pierwszą uwagą prowadzi do znalezienie wszystkich par dodatnich liczb całkowitych (c, d) spełniających równość $2c^2 = d^2+1$. ■

Zajmijmy się teraz liczbą $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (zamiast $\sqrt{2}$). Mamy

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1+\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}-1\right) = 1+\frac{\frac{3}{2}-1}{\sqrt{\frac{3}{2}}+1} = 1+\frac{1}{2(\sqrt{\frac{3}{2}}+1)} = 1+\frac{1}{\sqrt{6}+2} = 1+\frac{1}{4+(\sqrt{6}-2)} =$$
$$= 1+\frac{1}{4+\frac{2}{\sqrt{6}+2}} = 1+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{6}-2}{2}}} = 1+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{6}+2}}}.$$

Ponieważ liczba $\frac{1}{\sqrt{6}+2}$ pojawiła się już wcześniej, więc procedurę możemy powtarzać wielokrotnie, co prowadzi do równości

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}$$

Pokazaliśmy rozwinięcie w ułamek łańcuchowy liczby $\sqrt{\frac{3}{2}}$ podobnie można postępować z innymi „niewymiernościami kwadratowymi". Można też rozwijać w ułamki łancuchowe inne liczby. W wielu przypadkach, choć potrafimy znaleźć dowolnie długie ułamki łańcuchowe przybliżające jakąś liczbę, np. π to jednak nie potrafimy podać prostej formuły, za pomocą której można byłoby znajdować kolejne elementy jej ułamka łańcuchowego nieskończonego.

Na Olimpiadzie Matematycznej w 1965 r. pojawiło się zadanie
Udowodnić, że jeśli a, b są takimi liczbami całkowitymi, że $2a^2+a = 3b^2+b$, to liczby $a-b$ i $2a+2b+1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Później przytoczymy rozwiązanie tego zadania, ale najpierw zajmiemy się istnieniem par liczb całkowitych a, b, dla których równanie $2a^2+a = 3b^2+b$ jest spełnione. Traktując je jako kwadratowe z niewiadomą a otrzymujemy równość

$$a = \tfrac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{1+8(3b^2+b)}\right) = \tfrac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{24b^2+8b+1}\right).$$

Wobec tego dla pewnej liczby całkowitej c zachodzić musi równość $c^2 = 24b^2+8b+1$. Rozwiązując to kolejne równanie kwadratowe, teraz niewiadomą jest b, otrzymujemy

$$b = \tfrac{1}{12}\left(-2 \pm \sqrt{4-6(1-c^2)}\right) = \tfrac{1}{12}\left(-2 \pm \sqrt{6c^2-2}\right).$$

Powinna więc istnieć taka liczba $\tilde{d}$, że $\tilde{d}^2 = 6c^2 - 2$. Oczywiście liczba $\tilde{d}$ musi być parzysta. Niech $\tilde{d} = 2d$. Otrzymujemy $3c^2 - 1 = 2d^2$. Jest jasne, że jeśli istnieją „duże" liczby całkowite c, d, dla których spełniona jest równość $3c^2 - 1 = 2d^2$, to $\left(\frac{d}{c}\right)^2 \approx \frac{3}{2}$. Przyjrzyjmy się więc ułamkom $\frac{1}{1}$, $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $1 + \frac{1}{4+\frac{1}{2}} = \frac{11}{9}$, $1 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = \frac{49}{40}$, czyli:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{11}{9}, \quad \frac{49}{40}, \quad \frac{109}{89}, \quad \frac{485}{396}, \quad \frac{1079}{881}, \quad \frac{4801}{3920}, \quad \frac{10681}{8721}.$$

Obliczając wyrażenie $3c^2 - 2d^2$, gdzie d jest licznikiem ułamka, a c — mianownikiem otrzymujemy na zmianę liczby 1 i -2. Interesujące będą więc pary

$$(1,1), \quad (11,9), \quad (109,89), \quad (1079,881), \quad (10681,8721), \ldots$$

Po odpowiednio długiej chwili namysłu można zauważyć,[2] że pierwszy element takiej pary otrzymujemy mnożąc pierwszy element poprzedniej przez 5, drugi — przez 6 i dodając otrzymane iloczyny. Drugi element to suma pierwszego z poprzedniej pary pomnożonego przez 4 i drugiego z poprzedniej pary pomnożonego przez 5. Możemy powiedzieć, że z pary liczb całkowitych (d,c) powstaje para $(5d+6c, 4d+5c)$. Jeśli $3c^2 - 2d^2 = 1$, to $3(4d+5c)^2 - 2(5d+6c)^2 = -2d^2 + 3c^2 = 1$.

Mając c i d wyznaczamy $b = \frac{1}{12}\left(-2 + \sqrt{6c^2 - 2}\right) = \frac{1}{6}(-1+d)$ lub $b = -\frac{1}{6}(1+d)$. Podobnie $a = \frac{1}{4}(-1+c)$, $a = \frac{1}{4}(-1-c)$. Dodajmy, że tylko jedna z liczb $-\frac{1}{6}(1+d)$, $\frac{1}{6}(-1+d)$ może być całkowita, bo $-\frac{1}{6}(1+d) + \frac{1}{6}(-1+d) = -\frac{1}{3}$. Zachodzi też równość $\frac{1}{4}(-1+c) + \frac{1}{4}(-1-c) = -\frac{1}{2}$, więc tylko jedna z liczb $\frac{1}{4}(-1+c)$, $\frac{1}{4}(-1-c)$ może być całkowita.[3]

Z pary $(d,c) = (1,1)$ otrzymujemy $a = 0$, $b = 0$,
z pary $(11,9)$ — $a = 2, b = -2$,
z pary $(109,89)$ — $a = 22, b = 18$,
z pary $(1079,881)$ — $a = 220, b = -180$,
z pary $(10681,8721)$ — $a = 2180, b = 1780$.

Umiemy więc wskazać nieskończenie wiele par liczb całkowitych (a,b), dla których zachodzi równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$.

Udowodnimy teraz, nie przejmując się kwestia liczby par, tym bardziej ich wyglądem, że jeśli dla liczba całkowitych zachodzi równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$, to liczby $a - b$ oraz $2a + 2b + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Mamy $b^2 = 2a^2 + a - 2b^2 - b = (a-b)(2a+2b+1)$. Wobec tego każdy dzielnik pierwszy liczby $a - b$ jest dzielnikiem liczby b, więc jest również dzielnikiem liczby $a + b = a - b + 2b$, zatem dzielnikiem liczby $2a + 2b$. Wobec tego **nie** jest dzielnikiem liczby $2a + 2b + 1$. Udowodniliśmy, że liczby $a - b$ oraz $2a + 2b + 1$ są względnie

[2] Autor to wie, bo sprawdził na sobie

[3] Ponieważ $4d + 5c = 4(d+c) + c$, więc przejście do następnej pary nie zmienia reszty z dzielenia liczby c przez liczbę 4. Wobec tego wszystkie liczby c dają resztę 1 z dzielenia przez 4, zatem $a = \frac{1}{4}(c-1)$ dla wszystkich par (d,c). Inaczej jest z b. $5d + 6c = 6(d+c) - d$, więc kolejne reszty z dzielenia liczb d przez 6 to 1, $6 - 1 = 5$, $6 - 5 = 1$, ..., zatem będą stosowana na zmianę formuły $b = \frac{1}{6}(d-1)$ i $b = -\frac{1}{6}(d+1)$.

pierwsze. Ich iloczyn jest kwadratem, zatem istnieją takie liczby całkowite k, ℓ, że albo $a - b = k^2$ i $2a + 2b + 1 = \ell^2$, albo $a - b = -k^2$ i $2a + 2b + 1 = -\ell^2$. Wystarczy teraz udowodnić, że liczby $a - b$ i $2a + 2b + 1$ są nieujemne. Wymaga to skorzystania z całkowitości liczb a i b, to przyjmując $a = -\frac{5}{2}$, $b = -2$ otrzymujemy liczby, dla których $2a^2 + a = 3b^2 + b$ i $a - b = -\frac{1}{2} < 0$.

Załóżmy, że $a - b = -k^2$ i $2a + 2b + 1 = -\ell^2$. Liczba ℓ jest nieparzysta, więc $\ell = 2s + 1$ dla pewnej liczby całkowitej s. Mamy też

$$4a + 4 = 3 + 4a + 1 = 3 - 2k^2 - \ell^2 = =3 - 2k^2 - 4s^2 - 4s - 1 = 2(1 - k^2) - 4s(s + 1),$$

więc liczba $2(1 - k^2)$ jest podzielna przez 4, zatem $k = 2r + 1$ dla pewnej liczby całkowitej r. Skoro obie liczby k, ℓ są nieparzyste, to kwadrat ich iloczynu też jest nieparzysty, czyli b^2, jest liczbą nieparzystą, zatem b jest liczbą nieparzystą. Wynika stąd, że liczba $4b + 1$ daje resztę 5 z dzielenia przez 8, ale

$$4b + 1 = 2k^2 - \ell^2 = 8r(r + 1) + 2 - 4s(s + 1) - 1,$$

więc ta liczba z dzielenia przez 8 daje resztę -1, albo $7 = 8 + (-1)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie jest możliwe, by $a - b = -k^2$ i $2a + 2b + 1 = -\ell^2$, c kończy rozwiązanie zadania olimpijskiego.

To zadanie było dosyć trudne: spośród 78 finalistów XVI OM rozwiązało je jedynie 11 osób, w tym jedna całkowicie poprawnie; jeszcze trzy osoby miały wyniki częściowe. Trudniejsza była druga część, polegająca na wykazaniu, tych nierówności!

Uwaga 4. W istocie rzeczy umiemy wskazać wszystkie pary (d, c) liczb całkowitych, spełniających równanie $3c^2 - 2d^2 = 1$. Gdy z pary (d, c) tworzymy następną parę $(5d + 6c, 4d + 5c) = (y, x)$, możemy też wskazać sposób znajdowania pary (d, c), gdy znana jest para (y, x): $d = 5y - 6x$, $c = 5x - 4y$.

Jeśli $x, y > 0$ i $y \geq 3$ oraz $3x^2 - 2y^2 = 1$, to

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{3x^2-1}{2x^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{18} = \frac{26}{18} = \frac{13}{12} > \frac{36}{25},$$

(bo wtedy $3x^2 = 2y^2 + 1 \geq 19$, więc $3x^2 \geq 27$, gdyż $3x^2$ to liczba całkowita), więc $\frac{y}{x} > \frac{6}{5}$, zatem $5y - 6x > 0$. Prawdą jest też, że wtedy $\frac{y}{x} < \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{4}{3}$, więc $\frac{y}{x} < \frac{4}{3}$ i wobec tego $5y - 6x < y$. Oznacza to, że ta operacja zmniejsza pierwszy element pary (y, x), jeśli tylko jest on dostatecznie duży. Liczba y nie może być równa 2, bo wtedy liczba x nie byłaby całkowita. Więc pierwszy element jest zmniejszany, gdy oba są dodatnie. Podobnie z nierówności $\frac{y}{x} < \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{5}{4}$ wynika, że $5x - 4y > 0$, więc również drugi element nowej pary jest dodatni. Załamuje się to dopiero wtedy, gdy $y = 1 = x$, bo z pary $(1, 1)$ otrzymujemy parę $(-1, 1)$, następnie parę $(-11, 9)$, itd.

Oznaczając $(d_0, c_0) = (1, 1)$, $(d_1, c_1) = (11, 9)$, $(d_2, c_2) = (109, 89)$, ... można napisać:

$$d_n = \tfrac{\sqrt{6}+2}{4}\left(5 + 2\sqrt{6}\,\right)^n - \tfrac{\sqrt{6}-2}{4}\left(5 - 2\sqrt{6}\,\right)^n,$$
$$c_n = \tfrac{3+\sqrt{6}}{6}\left(5 + 2\sqrt{6}\,\right)^n + \tfrac{3-\sqrt{6}}{6}\left(5 - 2\sqrt{6}\,\right)^n,$$

co trzeba uzasadnić. Wystarczy jednak zauważyć, że podane wzory dają dobre wyniki dla $n = 0$ oraz, że spełnione są równości: $\frac{\sqrt{6}+2}{4}\left(5+2\sqrt{6}\,\right)^{n+1} - \frac{\sqrt{6}-2}{4}\left(5-2\sqrt{6}\,\right)^{n+1} =$

$= 5\left(\frac{\sqrt{6}+2}{4}\big(5+2\sqrt{6}\,\big)^n - \frac{\sqrt{6}-2}{4}\big(5-2\sqrt{6}\,\big)^n\right) + 6\left(\frac{3+\sqrt{6}}{6}\big(5+2\sqrt{6}\,\big)^n + \frac{3-\sqrt{6}}{6}\big(5-2\sqrt{6}\,\big)^n\right)$
oraz $\frac{3+\sqrt{6}}{6}\big(5+2\sqrt{6}\,\big)^{n+1} + \frac{3-\sqrt{6}}{6}\big(5-2\sqrt{6}\,\big)^{n+1} =$
$= 4\left(\frac{\sqrt{6}+2}{4}\big(5+2\sqrt{6}\,\big)^n - \frac{\sqrt{6}-2}{4}\big(5-2\sqrt{6}\,\big)^n\right) + 5\left(\frac{3+\sqrt{6}}{6}\big(5+2\sqrt{6}\,\big)^n + \frac{3-\sqrt{6}}{6}\big(5-2\sqrt{6}\,\big)^n\right),$
ale to wynika z łatwych do sprawdzenia równości:

$$\frac{\sqrt{6}+2}{4}(5+2\sqrt{6}\,) = 5\frac{\sqrt{6}+2}{4} + 3 + \sqrt{6}\,, \qquad -\frac{\sqrt{6}-2}{4}(5-2\sqrt{6}\,) = -5\frac{\sqrt{6}-2}{4} + 3 - \sqrt{6}\,,$$
$$\frac{3+\sqrt{6}}{6}\big(5+2\sqrt{6}\,\big) = \sqrt{6}+2+5\frac{3+\sqrt{6}}{6}\,, \qquad \frac{3-\sqrt{6}}{6}\big(5-2\sqrt{6}\,\big) = -\sqrt{6}+2+5\frac{3-\sqrt{6}}{6}\,.$$

Oczywiście sprawdzić można, ale skąd wziąć hipotezę? Tego analizować nie będziemy. Powiedzmy tylko, że szukanie wzorów w postaci sumy ciągów geometrycznych zadziwiające nie jest, a po dłuższym namyśle może się wręcz wydać naturalne.

Z tych wzorów wynikają równości $a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3+\sqrt{6}}{6}\big(5+2\sqrt{6}\,\big)^n + \frac{3-\sqrt{6}}{6}\big(5-2\sqrt{6}\,\big)^n - 1\right)$, $b_n = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{6}+2}{4}\big(5+2\sqrt{6}\,\big)^n - \frac{\sqrt{6}-2}{4}\big(5-2\sqrt{6}\,\big)^n\right)$. Z niech wynika, że

$$a_n - b_n = \frac{1}{24}\Big(\big(3+\sqrt{6}+(-1)^{n+1}(\sqrt{6}+2)\big)\big(5+2\sqrt{6}\,\big)^n + {} + \big(3-\sqrt{6}+(-1)^n(\sqrt{6}-2)\big)\big(5-2\sqrt{6}\,\big)^n - 2\Big).$$

Wynika stąd, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to ponieważ zachodzi równość $(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) = 5^2 - (2\sqrt{6}\,)^2 = 1$, więc

$$a_n - b_n = \frac{1}{24}\Big((5+2\sqrt{6}\,)^{n+1} + (5-2\sqrt{6}\,)^{n+1} - 2\Big) = = \frac{1}{24}\Big((5+2\sqrt{6}\,)^{(n+1)/2} - (5-2\sqrt{6}\,)^{(n+1)/2}\Big)^2,$$

zaś jeśli liczba n jest parzysta, to

$$a_n - b_n = \frac{1}{24}\Big((5+2\sqrt{6}\,)^n + (5-2\sqrt{6}\,)^n - 2\Big) = \frac{1}{24}\Big((5+2\sqrt{6}\,)^{n/2} - (5-2\sqrt{6}\,)^{n/2}\Big)^2.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że liczba $(5+2\sqrt{6}\,)^m - (5-2\sqrt{6}\,)^m$ jest iloczynem liczby $2\sqrt{6}$ i pewnej liczby całkowitej (zależnej od m), ale to wynika od razu z wzoru dwumianowego Newtona — nie redukują się te składniki, zawierające $\sqrt{6}$ w nieparzystej potędze.

Dodajmy, że chyba nikogo nie zdziwi to, że raczej nie próbowano oglądać konkretnych par liczb (a,b), dla których zachodzi równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$. ■

Tytułowe równanie Pella, to równanie $x^2 - dy^2 = 1$, gdzie d jest daną liczbą naturalną. Podstawowe twierdzenie na temat tego równania brzmi:

Jeśli liczba naturalna d nie jest kwadratem liczby naturalnej, to istnieje nieskończenie wiele różnych par liczb całkowitych x, y spełniających to równanie.

Można też dodać, że wszystkie rozwiązania związane są z reduktami nieskonczonego ułamka łańcuchowego liczby $\sqrt{d}$, czyli skończonymi fragmentami (początkowymi) tego ułamka. Równanie to pojawiło się już w starożytności (problem Archimedesa z ustawianiem bydła). Można o nim przeczytać w wielu podręcznikach do teorii liczb. Można też udowodnić samodzielnie odpowiednie twierdzenie naśladując rozumowania przedstawione wyżej.