Największy wspólny dzielnik

Przypomnijmy, że największym wspólnym dzielnikiem dwu liczb całkowitych jest największa z liczb całkowitych, które są dzielnikami obu danych liczb: $NWD(6;9) = 3$, $NWD(6;7) = 1$, $NWD(46;115) = 23$, $NWD(0;9) = 9$, $NWD(12;28) = 4$, $NWD(6;6) = 6$, a $NWD(0;0)$ nie istnieje, bo każda liczba całkowita jest dzielnikiem zera, więc największego dzielnika nie ma. Zwykle w szkołach uczniowie dowiadują się, że w celu znalezienie $NWD(a;b)$ należy rozłożyć liczby a i b na czynniki pierwsze i potem utworzyć iloczyn, w skład którego wejdą czynniki pierwsze występujące w obu rozkładach, z odpowiednimi wykładnikami. Formalnie rzecz biorąc jest to poprawna metoda. Można ją więc zastosować do liczb $452\,261$ i $383\,359$. Wystarczy więc rozłożyć te liczby na czynniki pierwsze. Jest pewien drobny kłopot. Żadna z tych liczb nie dzieli się przez 2, 3, 5, 7 , 11, co sprawdzamy bez trudu i być może bez sprzętu elektronicznego, ale nie wiadomo, jak długo przyjdzie nam obliczać różne ilorazy.

Można postąpić inaczej. Otóż

$$NDW(452\,261;383\,359) = NDW(452\,261 - 383\,359;383\,359)\,,$$

bo jeśli jakaś liczba jest dzielnikiem dwu liczb, to jest też dzielnikiem ich różnicy i sumy. Wobec tego poszukujemy $NWD(68902;383359)$. Sytuacja trochę poprawiła się, bo jedna z liczb zmalała. Możemy rzecz kontynuować:

$$NWD(68902;383359) = NWD(68902;383359 - 5\cdot 68902) = NWD(68902;38849)\,.$$

I dalej

$$NWD(68902;38849) = NWD(68902 - 38849;38849) = NWD(68902 - 38849;38849) =$$
$$= NWD(30053;38849) = NWD(30053;38849 - 30053) = NWD(30053;8796) =$$
$$= NWD(30053 - 3\cdot 8796;8796) = NWD(3665;8796) = NWD(3665;8796 - 2\cdot 3665) =$$
$$= NWD(3665;1466) = NWD(3665 - 2\cdot 1466;1466) = NWD(733;1466) = 733\,.$$

Pokazana metoda poszukiwania pochodzi od Euklidesa (ok. 325 p.n. - ok. 265 p.n.e), więc najnowsza nie jest, ale jest bardzo skuteczna i często stosowana z różnymi modyfikacjami. Liczba 733 jest pierwsza i trudno spodziewać się, by ktokolwiek zaczynał sprawdzanie podzielności liczb $452\ 261$ i $383\,359$ akurat od niej. W dodatku $452\ 261 = 617\cdot 733$, $383\,359 = 523\cdot 733$, a liczby 617 i 523 też są pierwsze. Znalezienie największego wspólnego dzielnika jest prostsze rachunkowo od rozłożenia na czynniki pierwsze!

Mamy też dodatkowy wniosek: $733 = 1466 - 733 = 1466 - (3665 - 2\cdot 1466) = $
$$= 3\cdot 1466 - 3665 = 3\cdot(8796 - 2\cdot 3665) - 3665 = 3\cdot 8796 - 7\cdot 3665 = 3\cdot 8796 - 7\cdot(30053 - 3\cdot 8796) =$$
$$= 24\cdot 8796 - 7\cdot 30053 = 24\cdot(38849 - 30053) - 7\cdot 30053 = 24\cdot 38849 - 31\cdot 30053 =$$
$$= 24\cdot 38849 - 31\cdot(68902 - 38849) = 55\cdot 38849 - 31\cdot 68902 =$$
$$= 55\cdot(383\,359 - 5\cdot 68902) - 31\cdot 68902 = 55\cdot 383\,359 - 306\cdot 68902 =$$
$$= 55\cdot 383\,359 - 306\cdot(452\,261 - 383\,359) = 361\cdot 383\,359 - 306\cdot 452\,261\,.$$

Okazało się więc, że największy wspólny dzielnik liczb 383 359 i 452 261 może być przedstawiony w postaci sumy $k \cdot 383\,359 + \ell \cdot 452\,261$ ($k = 361$, $\ell = -306$)

Gdybyśmy to samo rozumowanie przeprowadzili na ,,literach" oznaczających liczby całkowite, to okazałby się, że

dla dowolnych liczb całkowitych $a, b \neq 0$ *istnieją takie liczby całkowite* k, ℓ *, że*

$$NWD(a, b) = k \cdot a + \ell \cdot b \, .$$

Twierdzenie to w konkretnych sytuacjach dowodzą czasem dzieci w szkole podstawowej rozwiązując zadania typu: jaką ilość wody można odmierzyć za pomocą dwu pojemników o pojemnościach o pojemnościach 15 l. i 21 l mając do dyspozycji trzeci, bardzo duży pojemnik? Odpowiedź jest bardzo prosta $3 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 21$ l. W taki m zadaniu właśnie o to chodzi, że mniej niż 3 l. się nie da, bo za każdym razem wlewamy lub wylewamy ilość wody wyrażona w litrach liczbą podzielną przez 3, a to że 3 litry można odmierzyć wynika z równości $3 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 21$.

A teraz pokażę rozwiązania dwóch łatwych zadań z LXII Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 2. (z I stopnia) Dane są liczby całkowite dodatnie m , n oraz d . Udowodnić, że jeżeli liczby m^2n+1 i mn^2+1 są podzielne przez d , to również liczby m^3+1 i n^3+1 są podzielne przez d .

Zadanie rozwiązało poprawnie wielu uczestników (682+93=775 spośród 1359, którzy nadesłali rozwiązanie, a z pozostałych jeszcze 226 miało ,,połowę" rozwiązania). A myśląc o największym wspólnym dzielniku w sposób opisany wcześniej możemy napisać:

$$m^3 + 1 = m^2n + 1 + (m^3 - m^2n) = m^2n + 1 + m^2(m - n) =$$
$$= m^2n + 1 + m^2 \big(m(mn^2 + 1) - n(m^2n + 1)\big) ,$$

więc liczba $m^3 + 1$ jest podzielna przez d , bo jest sumą iloczynów, z których każdy zawiera czynnika podzielny przez d .

Podobnie dowodzimy podzielność liczby $n^3 + 1$ przez d .

Zadanie 7. Znaleźć wszystkie takie pary (a, b) różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba $b^2 + ab + 4$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + ab + 4$.

Ponieważ $a \neq b$ i liczba $a^2 + ab + 4$ jest dzielnikiem liczby $b^2 + ab + 4$, więc zachodzi nierówność $a^2 + ab + 4 < b^2 + ab + 4$, zatem $a < b$. Liczba $a^2 + ab + 4$ jest dzielnikiem liczby $b(a^2+ab+4) - a(b^2+ab+4) = 4(b-a)$, więc $a^2+ab+4 \leq 4(b-a)$, a ta nierówność jest równoważna takiej $a^2 + 4a + 4 \leq 4b - ab = b(4 - a)$. Wobec tego $4 - a > 0$, a to oznacza, że a to jedna z liczb $1; 2; 3$.

Jeśli $a = 3$, to liczba $b^2 + 3b + 4$ jest podzielna przez liczbę $13 + 3b$, więc liczba $9(b^2 + 3b + 4) - (3b + 13)(3b - 4) = 88$ też jest podzielna przez $3b + 13$. Ponieważ

$b > a = 3$ i $3b + 13 \leq 88$, więc $4 \leq b \leq 25$. Dzielniki 88, to liczby 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44 i 88. Z nich tylko trzy ostatnie są większe od 13. Rozwiązujemy 3 równania $3b + 13 = 22$, $3b + 13 = 44$ i $3b + 13 = 88$ otrzymując kolejno 3, $\frac{31}{3}$ i 25. Tylko ostatnia z tych liczb jest jednocześnie całkowita i większa od 3, więc jedyną towarzyszką dla liczby $a = 3$ może być liczba $b = 25$. Wtedy $13 + 3b = 88$ jest dzielnikiem liczby $9(25^2+3\cdot 25+4)$, względnie pierwszym z 9, więc jest też dzielnikiem liczby $25^2+3\cdot 25+4$

Jeśli $a = 2$, to liczba $b^2 + 2b + 4$ ma być podzielna przez liczbę $2b + 8$, więc również liczba $2(b^2 + 2b + 4) - (2b + 8)(b - 2) = 24$ jest podzielna przez $2b + 8$, zatem liczba 12 jest podzielna przez liczbą $b + 4$. Ponieważ $b > a = 2$, więc $b + 4 > 6$, zatem $b + 4 = 12$, czyli $b = 8$, ale liczba $8^2 + 2 \cdot 8 + 4 = (8 + 1)^2 + 3 = 84$ nie jest podzielna przez liczbę $2 \cdot 8 + 8 = 24$.

Jeśli $a = 1$, to liczba $b^2 + b + 4$ ma być podzielna przez liczbę $b + 5$. Mamy jednak $b^2 + b + 4 = (b + 5)(b - 4) + 24$, więc $b + 5$ musi dzielić liczbę 24 i oczywiście $b > a = 1$. Mamy więc $b = 3$, $b = 7$ i $b = 19$.

Istnieją więc cztery pary liczb (a, b): $(1, 3)$, $(1, 7)$, $(1, 19)$ i $(3, 25)$.

Zadanie jest rozwiązane. Czy było trudne? Rozwiązało je $406 + 105 = 511$ osób spośród 796, które je nadesłały. 57 następnych uczestników uzyskało rozwiązania połowiczne. Nadesłała je więc tylko nieco ponad połowa startujących.