John von Neumann (1903 – 1957): *If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.*

John von Neumann: *By and large it is uniformly true that in mathematics there is a time lapse between a mathematical discovery and the moment it becomes useful; and that this lapse can be anything from 30 to 100 years, in some cases even more; and that the whole system seems to function without any direction, without any reference to usefulness, and without any desire to do things which are useful.*

11 czerwca 2016 r. zmarł Henryk Pawłowski, nauczyciel matematyki, autor podręczników i książek z zadaniami, człowiek wspierający różnymi swymi działaniami nauczanie matematyki a przede wszystkim kształcenie uzdolnionej młodzieży. Nie miejsce tu wyliczanie przeróżnych Jego zasług, ale też nie sposób zauważyć, że Go już nie ma. 11 czerwca — to była sobota, zmarł w nocy z 10 na 11 czerwca. Byliśmy umówieni na rozmowę telefoniczną w niedzielę o podręczniku, który napisał, a który ja recenzowałem dla MEN-u jako tzw. rzeczoznawca. Nie zadzwonił, zdziwiłem się, ale jeszcze nie znałem przyczyny. W poniedziałek dowiedziałem się . . .

W 2013 r. dwie osoby opiniowały Jego podręcznik do I klasy liceum, poniżej uzasadnienie napisane przez autora negatywnej recenzji.

Analiza tekstu podręcznika z punktów widzenia:

a) matematycznej koncepcji stanowiącej podstawę dla opracowania dydaktycznego,

b) autorskiej wizji dydaktycznej przyjętej koncepcji skłoniła mnie do sformułowania negatywnej konkluzji kwalifikacyjnej

1. Matematyka w podręczniku jest traktowana jako struktura pojęć, twierdzeń, formalnych schematów postępowania, które są przekazywane w formie gotowej wiedzy opisywanej abstrakcyjnym językiem akademickim. Jest to jednostronne ujmowanie matematyki szkolnej. Matematyka jest znacznie bogatsza i posiada różne aspekty z których każdy powinien być rozwijany w szkole, jako istotna i pełnowartościowa jej część. Jest ona biblioteką teoretycznych modeli i narzędzi badania sytuacji realnych, sposobem patrzenia na świat, a także działalnością intelektualną (rezerwuarem aktywności) oraz środkiem pokonywania blokad emocjonalnych w procesie uczenia się.

2. Autorska realizacja tak obranej wizji jest fragmentaryczna. Pojęcia matematyczne redukuje się do ich form powierzchniowych i modeli formalnych, bez przybliżania się do ich idei głębokich (por. Z. Semadeni). Ignoruje się bazę intuicyjno skojarzeniową pojęć - obudowuje się je „pozytywnymi" przykładami przy braku kontrprzykładów bez badania przypadków szczególnych i skrajnych; narzędzia wykonawcze sprowadza się do gotowych schematów postępowania. Język komunikowania (w partiach teoretycznych jest pozbawiony elementów poglądowych, przy zachwianiu proporcji między językiem sformalizowanym, językiem matematyki szkolnej oraz naturalnym. Konteksty, w których pojawiają się pojęcia są redukowane do sytuacji „czysto" matematycznych.

3. Dydaktyczna realizacja zapisów podstawy programowej kształcenia ogólnego powinna gwarantować osiąganie przez każdego ucznia każdego z pięciu celów kształcenia matematycznego opisanych dla czwartego etapu edukacyjnego. Tak nie jest.

a) W podstawie programowej czytamy, że to uczeń powinien interpretować tekst matematyczny, dobierać modele matematyczne i oceniać ich trafność, tworzyć i stosować strategie rozwiązań zadań, prowadzić proste rozumowania. Nie ma sytuacji, w których uczeń jest zmuszony "interpretować treści matematyczne w różnych obszarach matematyki, konkretyzować pojęcia i twierdzenia w różnych sytuacjach.

b) Większość stronic książki (całe paragrafy) zadrukowano „znaczkami” bez przerywników dla zastanowienia się, refleksji, czy podjęcia działania przez ucznia, w sposób zniechęcający do zajmowania się nimi. Wszystko odbywa się na formalnym poziomie o prezentacji logicznej . Zawartość merytoryczna treści nie budzi zastrzeżeń; ubóstwo środków językowych (poglądowych, graficznych oraz typu enaktywnego), redakcja informacji, czy rozwiązań zadań blokują aktywną postawę ucznia wobec matematyki. Nie spotyka się poleceń typu: porównaj, zrób to spróbuj przewidzieć następny krok, a także: pytań dlaczego?, jak to zrobić?, skąd to wynika? Nie ma odsyłaczy do literatury, przykładu, fragmentu tekstu, ani zwrotów akcentujących, co jest ważne, podstawowe, informacyjne, co trzeba opanować „do końca” co zapamiętać, co ważne z punktu widzenia egzaminu maturalnego.

c) Podręcznik nie organizuje „pracy” ucznia wokół zadania, twierdzenia czy pojęcia. Nie uczy się rozwiązywania zadań, nie uczy się dowodzenia twierdzeń. Nawet w sytuacjach, w których uczniowie sami potrafiliby zaproponować sposób obliczenia, tok rozumowania, muszą śledzić formalnie napisane ciągi wyrażeń. Prawie nie wykorzystuje się narzędzi technologii informacyjnej w obliczeniach, przy stawianiu hipotez, ich weryfikowaniu.

d) W szczątkowej formie pojawiają się zagadnienia związane z budowaniem modeli matematycznych (a nie z prezentacją już „gotowych” modeli teoretycznych), ich oceną z matematyzowaniem problemów spoza matematyki oraz z interpretowaniem wyników badania teoretycznego. Podręcznik nie ujawnia mechanizmów matematyzowania problemów spoza matematyki oraz interpretowania wyników badania teoretycznego. Wiadomo, że jeśli podręcznik nie organizuje takich sytuacji, to także nauczyciel skupia się na wyniku — odpowiedzi, a nie organizuje „pracy” wokół zadania „pracy” wokół twierdzenia. Praktyka przekonuje, że takie podejście jest nieskuteczne, zniechęcające do matematyki.

4. Układ podręcznika realizuje liniowy tok przekazu wiedzy prawie nie ma sytuacji zadaniowych, które wiążą treści z różnych części tego podręcznika. Książka w nikłym zakresie integruje treści różnych przedmiotów poprzez ograniczenie się do operowania obiektami matematycznymi. Nie dostrzegłem prób hierarchizowania informacji (umiejętności); wszystko jest traktowane jako równie ważne. Nie orientuje się ucznia na to, co będzie mu przydatne w „życiu”, przy samodzielnym zdobywaniu wiedzy oraz zdawaniu matury.

5. Podręcznik w zasadzie uwzględnia stan wiedzy naukowej z matematyki. Natomiast zupełnie nie bierze pod uwagę aktualnego stanu wiedzy i wyników badań z dydaktyki matematyki. Odbiorcami podręcznika będą uczniowie o zróżnicowanym doświadczeniu matematycznym różnych umiejętnościach typu rachunkowego, logicznego, treściowego, o niewielkiej umiejętności samodzielnego analizowania tekstów, hierarchizowania informacji itp. Podręcznik ignoruje ten stan rzeczy; partie teoretyczne, a nawet zadania będą dla znacznej większości absolwentów współczesnych gimnazjów niedostępne. Potwierdzają to wyniki ostatniego sprawdzianu po gimnazjum.

6. W podręczniku jest wiele interesujących zadań, dość trudnych dla gimnazjalistów o przeciętnym doświadczeniu matematycznym. Z lekturą tekstu poradzą sobie uczniowie bardzo dobrze przygotowani matematycznie, dociekliwi i uparci w dążeniu do celu, którzy potrafią konkretyzować podawane stwierdzenia, interpretować je w różnych sytuacjach. Podręcznik nie nadaje się do nadrobienia materiału z opuszczonych lekcji. Zaznaczam, że w nowej — poprawionej — wersji maszynopisu usterek matematycznych jest niewiele. Tę książkę powitaliby z zadowoleniem nauczyciele traktujący matematykę jako gotową wiedzę o pojęciach i rozumowaniach logicznych, zaliczaną w niedawnej przeszłości do kanonów szkolnych, którą muszą przekazywać dalej. Inni natomiast, aby efektywnie pomagać absolwentom współczesnych gim-

nazjów, powinni obok tego podręcznika tworzyć inny, własny podręcznik.

A oto fragment mojej opinii (zostałem poproszony o recenzję po odwołaniu się wydawnictwa od decyzji negatywnej spowodowanej negatywną oceną podręcznika przez pierwszych recenzentów):

Podręcznik zawiera wiele dowodów podawanych twierdzeń, wiele zadań w tym ciekawych, odpowiedzi do pewnej liczby zadań zawierają też szkic rozwiązania. Po raz pierwszy od kilku lat oceniam podręcznik do matematyki, a nie książkę służącą jedynie przygotowaniu się do kolejnego egzaminu zewnętrznego. Uczniowie korzystający z tego podręcznika będą zdecydowanie lepiej radzić sobie na studiach niż korzystający z większości innych podręczników.

W którejś rozmowie Henryk opowiedział mi, że na lekcji rozwiązywał z uczniami takie zadanie (*to z jakiejś próbnej matury*):

1. Udowodnić, że jeśli ramiona BC i DA trapezu $ABCD$ leżą na prostych prostopadłych, to

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2.$$

Rozwiązanie. Załóżmy, że $AB > CD$ i oznaczmy punkt przecięcia prostych AD i BC przez E. Mamy więc

$AC^2 + BD^2 = AE^2 + EC^2 + BE^2 + ED^2 = (AE^2 + BE^2) + (EC^2 + ED^2) = AB^2 + CD^2$.

Zadanie rozwiązane. I co dalej zrobił Henryk Pawłowski w czasie lekcji, której część poświęcił temu zadaniu? Ano zapytał swych uczniów, w którym miejscu skorzystali z równoległości boków AB i CD. Ponieważ nie skorzystali w żadnym miejscu, więc okazało się, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdego czworokąta. I to jeszcze nie był koniec. Padło pytanie o odwrócenie twierdzenia. Okazało się, że można odwrócić. Piszę o tym, bo bardzo mi się to podejście do zadania podoba. Ale i tak zadałem Henrykowi (w następnej rozmowie, bo od razu do głowy mi ono nie przyszło) pytanie: a gdzie korzysta się z tego, że punkty A, B, C, D leżą w jednej płaszczyźnie. Niby korzysta się mówiąc o przecięciu prostych AD i BC. No dobrze, ale po co? Przecież można napisać, że proste AD i BC są prostopadłe (choć być może są skośne) wtedy i tylko wtedy, gdy $(A - D) \cdot (B - C) = 0$, kropka oznacza iloczyn skalarny. Tę równość można przepisać w postaci $A \cdot B + C \cdot D = B \cdot D + A \cdot C$. Równość, którą należało dowieść ma postać $(A - C)^2 + (B - D)^2 = (A - B)^2 + (B - D)^2$, podnoszenie do kwadratu polega na mnożeniu skalarnym wektora przez siebie. Ostatnia równość jest równoważna temu, że $A \cdot C + B \cdot D = A \cdot B + B \cdot D$, więc otrzymanej poprzednio z założenia. Co więcej, w ostatniej wersji dowód geometryczny zaczyna już czegoś od ucznia wymagać. Tu algebra jest rzeczywiście pomocna. Gdybyśmy chcieli rozwiązać przestrzenne zadanie nie używając rachunku na wektorach, musielibyśmy zapewne poprowadzić płaszczyznę Π równoległą do prostej AD zawierającą prostą BC i zrzutować prostopadle na Π prostą AD. To redukuje problem przestrzenny do już rozwiązanego płaskiego.

Kiedyś, w ramach Festiwalu Nauki, miałem jakiś odczyt na temat zadań egzaminacyjnych na „mój" wydział. Omawiałem proste zadanie z XVII OM:

Dowieść, że jeżeli liczba rzeczywista x_1 spełnia równanie $x^3 + 2px + q = 0$ (p, q — dane liczby rzeczywiste), to $x_1 q \leq p^2$.

Zadanie jest łatwe, ale jedno z rozwiązań tak wygląda:

$$0 = x_1^3 + 2px_1 + q = x_1 \cdot x_1^2 + 2px_1 + q,$$

więc x_1 jest pierwiastkiem równania kwadratowego (jeżeli $x_1 \neq 0$)

$$x_1 \cdot x^2 + 2px + q = 0,$$

a skoro to równanie ma pierwiastek rzeczywisty, to $0 \leqslant \Delta = 4p^2 - 4x_1 q = 4(p^2 - x_1 q)$, a to właśnie mieliśmy dowieść. Gdy $x_1 = 0$ do dowodu nic nie ma. Pokazawszy to rozwiązanie na tablicy, zapytałem, czy to rozwiązanie jest łatwe. Oczekiwałem odpowiedzi, że tak (bo takie krótkie), ale jakichś dorosły człowiek z końca dużej sali od razu powiedział, że jest trudne i w dodatku wiedział, że to z OM i dosyć dokładnie lokalizował je w czasie. I to była pierwsza z moich rozmów z Henrykiem. Przyszli wtedy na mój odczyt z p. Wojciechem Tomalczykiem z Gdyni, zamiast pójść na jakieś spotkanie z kimś ważnym, na którym miano jakoś honorować wybitnych uczniów. Pisał książki poświęcone zadaniom olimpijskim, nie tylko polskim, więc orientował się.

A teraz kilka zadań olimpijskich. Łatwe zadanie z drugiego stopnia LXVII OM

2. We wnętrzu trójkąta o bokach długości $3, 4, 5$ leży punkt P. Wykazać, że jeżeli odległości punktu P od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości P od boków też.

Rozwiązanie

Trójkąt można umieścić w prostokątnym układzie współrzędnych w taki sposób, by jego wierzchołkami stały się punkty $A = (4, 0)$, $B = (0, 3)$ i $C = (0, 0)$ (bo jest prostokątny, gdyż $3^2 + 4^2 = 5^2$). Niech $P = (x, y)$. Odległość punktu P od wierzchołka A jest równa $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, a ponieważ jest to liczba wymierna, więc również liczba $(x-4)^2 + y^2$ jest wymierna. Wymierne są również liczby $x^2 + (y-3)^2$ oraz $x^2 + y^2$, jako kwadraty odległości od wierzchołków B i C. Różnica liczb wymiernych jest wymierna, więc wymierne są też liczby $x^2+y^2-\big((x-4)^2+y^2\big) = =8x-16$ i $x^2+y^2-\big(x^2+(y-3)^2\big) = 6y-9$, więc również liczby x i y, czyli odległości od boków BC i AC. Równanie prostej AB wygląda tak: $3x+4y-12 = 0$. Odległość punktu P od boku AB jest równa $\frac{|3x+4y-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x+4y-12|}{5}$, więc też jest liczbą wymierną (jako iloraz liczb wymiernych). $\square$

Drobny komentarz. Zostaje problem w pewnym sensie narzucający się (w każdym razie Tomaszowi Szymczykowi uczącemu w V LO w Bielsku–Białej i Kamilowi Rychlewiczowi studiującemu w UW). A czy w ogóle takie punkty istnieją? Kamil Rychlewicz sprawdził, że tak, ale nie znalazł liczb jednocyfrowych. Jego zdaniem „najprotszy" leży w odległości $\frac{20}{23}$ od boku długości 3 i w odległości $\frac{21}{23}$ od boku długości 4. Całkiem niezła zagadka dla młodzieży to znalezienie go (lub innych), oczywiście można włączyć komputer, jeśli uczeń umie, ale obliczenia trzeba jakoś zaplanować . . .

W pracy T. G. Berry'ego, „Points at rational distances from the vertices of s triangle", Acta Arithmetica, 62(1992) pp. 391-398 zostało wykazane m. in. że jeśli przynajmniej jeden z boków w trójkącie ma wymierną długość, a kwadraty długości wszystkich boków są wymierne to zbiór punktów o wymiernych odległościach od wierzchołków tego trójkąta jest gęsty w płaszczyźnie tego trójkąta.

Na temat tego zadania pojawi się wkrótce w *Delcie* artykuł Mariusza Skałby i Kamila Rychlewicza.

3. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których wielomian

$$W(x) = x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2$$

może być zapisany w postaci iloczynu dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Mamy

$$W(x) = x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 = (x^2-n-p)^2 + (n-p)^2 - (n+p)^2 = (x^2-n-p)^2 - 4np =$$
$$= (x^2 - n - p - 2\sqrt{np})(x^2 - n - p + 2\sqrt{np}) = (x^2 - (\sqrt{n} + \sqrt{p})^2)(x^2 - (\sqrt{n} - \sqrt{p})^2)$$
$$= (x - \sqrt{n} - \sqrt{p})(x + \sqrt{n} + \sqrt{p})(x - \sqrt{n} + \sqrt{p})(x + \sqrt{n} - \sqrt{p}).$$

Rozkład na czynniki nierozkładalne w zbiorze wielomianów o współczynnikach rzeczywistych jest jednoznaczny, więc żądany rozkład może być uzyskany jedynie przez połączenie otrzymanych wielomianów stopnia pierwszego w pary. Jedna metod pojawiła się sama „po drodze". Aby wielomiany $x^2-n-p-2\sqrt{np}$, $x^2-n-p+2\sqrt{np}$ miały całkowite współczynniki potrzeba i wystarcza, by liczba np była kwadratem liczby całkowitej, więc by istniała taka liczba całkowita m, że $n=m^2p$. Inny sposób połączenia tych wielomianów w pary to $(x-\sqrt{n}-\sqrt{p})(x-\sqrt{n}+\sqrt{p})=x^2-2\sqrt{n}x+n-p$ i $(x+\sqrt{n}+\sqrt{p})(x+\sqrt{n}-\sqrt{p})=x^2+2\sqrt{n}x+n-p$. W tym wypadku wielomiany mają całkowite współczynniki wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{n}$ jest liczbą całkowita, czyli gdy istnieje taka liczba całkowita m, że $n=m^2$. Ostatnie metoda połączenia w pary tych czynników pierwszego stopnia nie daje dobrego rezultatu niezależnie od n, bo $\sqrt{p}\notin\mathbb{Q}$, a jednym z czynników musiałby być wielomian $(x-\sqrt{n}-\sqrt{p})(x+\sqrt{n}-\sqrt{p})=$ $=x^2-2\sqrt{p}x+p-n$.

Komentarz. W tym rozwiązaniu skorzystaliśmy w istotny sposób z twierdzenia, którego w szkole nie ma, tzn. nie jest nawet formułowane. Jednak warto o nim uczniom zainteresowanym matematyką mówić. Mam wrażenie, że młodzież przyzwyczajona do jednoznaczności rozkładu liczb na czynniki pierwsze (twierdzenie też oczywiście niedowodzone i nawet nieformułowane) ma jednak kłopot z jednoznacznością rozkładu wielomianów o współczynnikach rzeczywistych (lub wymiernych). Twierdzenie to można udowodnić w szkole np. na kółku, ale głównym problemem jest jego zrozumienie. Trzeba najpierw pokazać, że gdzieś jednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne nie ma. Przykładem może być $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ (tzn. zbiór wszystkich liczb postaci $a+b\sqrt{5}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi) lub $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. W pierwszym przypadku można zająć się równością $2\cdot 2=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$, a w drugim wzorem $3\cdot 3=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$.

Dowody jednoznaczności można oprzeć na następującym twierdzeniu: jeśli d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych a i b (wielomianów u i v o współczynnikach rzeczywistych), to istnieją takie liczby p i q (wielomiany p i q), że $d=ap+bq$ $(d=pu+qv)$. Dowód tego twierdzenia jest dostępny w wielu książkach poświęconych teorii liczb lub algebrze. Jest też dostępny (dla wielomianów) na mojej stronie internetowej na początku dziewiątego rozdziału skryptu do analizy matematycznej dla I roku:
http:// www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM1skrypt/am1_cz_09-calka_nieoznaczona.pdf

4. Niech k,n będą liczbami nieparzystymi większymi od 1. Wykazać, że jeśli istnieje taka liczba naturalna a, że

$$k \mid 2^a+1 \ \text{ oraz } \ n \mid 2^a-1, \tag{1}$$

to nie istnieje taka liczba naturalna b, że

$$n \mid 2^b+1 \ \text{ oraz } \ k \mid 2^b-1. \tag{2}$$

Uwaga: Symbol $p \mid q$ oznacza, że liczba całkowita p jest dzielnikiem liczby całkowitej q.

Rozwiązanie

Załóżmy, że warunki (1) i (2) są spełnione jednocześnie. Każdy wspólny dzielnik liczb k i n dzieli liczbę

$$2^a+1-(2^a-1)=2,$$

więc k i n — jako nieparzyste — są względnie pierwsze.

Niech α oznacza najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, dla której $k\mid 2^\alpha-1$, zaś β — najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, dla której $n\mid 2^\beta-1$. Jeśli $\mu\geqslant 1$ jest liczbą całkowitą, to

$$k \mid (2^\alpha-1)(2^{(\mu-1)\alpha}+2^{(\mu-2)\alpha}+\ldots+2^\alpha+1)=2^{\mu\alpha}-1.$$

Niech $m > 0$ będzie liczbą całkowitą, a ϱ — resztą z dzielenia m przez ϱ: $m = \mu\alpha + \varrho$, gdzie $\mu \geqslant 0$ i $0 \leqslant \varrho < \alpha$. Wtedy $k \mid 2^\varrho(2^{\mu\alpha} - 1) = 2^m - 2^\varrho$, więc liczby 2^ϱ i 2^m dają tę samą resztę z dzielenia przez k. Wynika stąd w szczególności równoważność $k \mid 2^m - 1 \iff \alpha \mid m$.

Niech $c \geqslant 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $a = c\alpha + \gamma$ dla pewnej liczby $\gamma \in \{0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1\}$. Ponieważ $k \mid 2^a + 1$, więc $k \mid 2^{c\alpha+\gamma} - 2^\gamma + 2^\gamma + 1$, zatem $k \mid 2^\gamma + 1$. Oczywiście $\gamma > 0$ oraz $k \mid 2^{2\gamma} - 1 = (2^\gamma + 1)(2^\gamma - 1)$, więc $\alpha \mid 2\gamma \leqslant 2\alpha - 2$, czyli $\alpha = 2\gamma$. W taki sam sposób wykazujemy, że jeśli δ jest resztą z dzielenia b przez β, to $\beta = 2\delta$ i $n \mid 2^\delta + 1$.

Zachodzi równość $a = c\alpha + \gamma = \gamma(2c + 1)$. Podobnie $b = d\beta + \delta = \delta(2d + 1)$, gdzie $d \geqslant 0$ jest taką liczbą całkowitą, że $b = d\beta + \delta$.

Ponieważ $n \mid 2^a - 1$, więc $2\delta = \beta \mid a = \gamma(2c + 1)$. Widzimy, że $k \mid 2^b - 1$, więc $2\gamma = \alpha \mid b = \delta(2d+1)$. Stąd wynika, że $4\gamma\delta \mid \gamma\delta(2c + 1)(2d + 1)$, zatem 4 jest dzielnikiem nieparzystej liczby $(2c + 1)(2d + 1)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że warunki (1) i (2) nie mogą być spełnione równocześnie . □

5. Odcinki AD, BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty P, Q są symetryczne do punktu M odpowiednio względem prostych AD, BE. Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ.

Rozwiązanie

Mamy $M = \frac{1}{2}(A + B)$ oraz $(D - A) \cdot (C - B) = 0$. Dla pewnej liczby rzeczywistej t zachodzi też równość $D - B = t(C - B)$, bo punkt D leży na prostej BC. Mamy też $P = A + D - M$. Wynika to stąd, że środki odcinków MP i AD pokrywają się, czyli zachodzi równość $\frac{1}{2}(P + M) = \frac{1}{2}(A + D)$. Bez trudu można sprawdzić, że odcinek PM jest prostopadły do odcinka AD:

$$(D - A) \cdot (P - M) = (D - A) \cdot (A + D - 2M) = (D - A) \cdot (D - B) = t(D - A) \cdot (C - B) = 0.$$

Analogicznie $Q = B + E - M$. Wtedy środkiem odcinka DE jest punkt $\frac{1}{2}(D + E)$. Z równości

$$\tfrac{1}{2}(P + Q) = \tfrac{1}{2}(A + D - M + B + E - M) = \tfrac{1}{2}(D + E + A + B - 2M) = \tfrac{1}{2}(D + E)$$

wynika, że środki odcinków DE i PQ pokrywają się. Udowodniliśmy nieco więcej niż trzeba było i to przy słabszych założeniach — w żadnym momencie nie skorzystaliśmy z tego, że wszystkie kąty trójkąta ABC są ostre. □

6. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

Rozwiązanie

Rozpoczniemy od bardzo długiego rozwiązania. Będziemy dodawać i odejmować punkty płaszczyzny $(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$ i mnożyć je skalarnie: $(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$, więc iloczyn skalarny dwóch punktów traktowanych jako wektory o początku $(0, 0)$ jest liczbą. Będziemy też mnożyć punkty przez liczby rzeczywiste: $t(a, b) = (ta, tb)$.

Wektor (a, b) jest prostopadły do wektora (c, d) wtedy i tylko wtedy, gdy (twierdzenie Pitagorasa) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2$, czyli gdy $(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd = 0$. Dla każdego punktu P prostej BI istnieje dokładnie jedna taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że

$$P = I + x(B - I) = xB + (1 - x)I.$$

W dalszym ciągu P oznacza punkt z treści zadania.

Niech $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D$, czyli S jest środkiem odcinka AD. Znajdziemy taką liczbę rzeczywistą x, że $(P - S) \cdot (D - A) = 0$, a potem sprawdzimy, że $(P - D) \cdot (C - I) = 0$, więc że I leży na wysokości trójkąta DPQ z wierzchołka P. Punkt I leży też na wysokości tego trójkąta z wierzchołka D. Dwie wysokości przechodzą przez punkt I, więc trzecia też.

Udowodnimy, że[1]

$$(B - A) \cdot (C - A) = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2),\ (A - B) \cdot (C - B) = \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2),\ (A - C) \cdot (B - C) = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

[1] Te równości to w zasadzie twierdzenie kosinusów.

Mamy $a^2 = (B-C)\cdot(B-C) = (B-A+A-C)\cdot(B-A+A-C) = (B-A)\cdot(B-A)+$ $+2(B-A)\cdot(A-C)+(A-C)\cdot(A-C) = c^2+b^2-2(B-A)\cdot(C-A)$, więc otrzymaliśmy równość $(B-A)\cdot(C-A) = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$. Analogicznie uzasadniamy następne dwa wzory.

Z twierdzenia o dwusiecznej wynika od razu, że
$D = \frac{1}{b+c}(bB+cC),\ \ I = \frac{1}{a+b+c}(aA+bB+cC) = \frac{1}{a+b+c}\big(aA+(b+c)D\big).$
Mamy też:
$S = \frac{1}{2}(A+D) = \frac{1}{2(b+c)}\big((b+c)A+bB+cC\big)$, a także
$P-I = x(B-I) = \frac{x}{a+b+c}\big(a(B-A)+c(B-C)\big),$
$D-A = \frac{1}{b+c}\big(b(B-A)+c(C-A)\big),$
$I-S = \frac{1}{a+b+c}\big(aA+bB+cC\big) - \frac{1}{2(b+c)}\big((b+c)A+bB+cC\big) = \frac{b+c-a}{2(b+c)(a+b+c)}\big(b(B-A)+c(C-A)\big),$
zatem ma być spełniona równość
$0 = (P-S)\cdot(D-A) = \big((P-I)-(S-I)\big)\cdot(D-A) = (P-I)(D-A)+(I-S)(D-A) =$
$= \frac{x(a(B-A)+c(B-C))}{a+b+c}\cdot\frac{b(B-A)+c(C-A)}{b+c} + \frac{(b+c-a)(b(B-A)+c(C-A))}{2(b+c)(a+b+c)}\cdot\frac{b(B-A)+c(C-A)}{b+c} =$
$= \frac{x(abc^2+\frac{ac}{2}(b^2+c^2-a^2)+\frac{bc}{2}(a^2+c^2-b^2)-\frac{c^2}{2}(a^2+b^2-c^2))}{(b+c)(a+b+c)} + \frac{(b+c-a)(2b^2c^2+bc(b^2+c^2-a^2))}{2(b+c)^2(a+b+c)} =$
$= \frac{cx(2abc+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-c(a^2+b^2-c^2))}{2(b+c)(a+b+c)} + \frac{bc(b+c-a)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{2(b+c)^2(a+b+c)} =$
$= \frac{cx(a(b+c)^2-a^3+(b-c)(a^2-bc-b^2-bc-c^2))}{2(b+c)(a+b+c)} + \frac{bc(b+c-a)((b+c)^2-a^2)}{2(b+c)^2(a+b+c)} =$
$= \big((b+c)^2-a^2\big)\big(\frac{cx(a-(b-c))}{2(b+c)(a+b+c)} + \frac{bc(b+c-a)}{2(b+c)^2(a+b+c)}\big) = \frac{c((b+c)^2-a^2)}{2(b+c)^2(a+b+c)}\big(x(b+c)(a+c-b)+b(b+c-a)\big),$
więc $x = -\frac{b(b+c-a)}{(b+c)(a+c-b)}$ — uff! [2]

Zachodzą równości
$P-D = xB+(1-x)I-D = x(B-I)+I-D =$
$= \frac{x((a+c)B-aA-cC)}{a+b+c} + \frac{(b+c)(aA+bB+cC)-(a+b+c)(bB+cC)}{(b+c)(a+b+c)} =$
$= \frac{x(b+c)[(a+c)(B-C)-a(A-C)]+a[(b+c)(A-C)-b(B-C)]}{(b+c)(a+b+c)}$
oraz $I-C = \frac{a(A-C)+b(B-C)}{a+b+c}$. Wobec tego
$(b+c)(a+b+c)^2(P-D)(I-C) =$
$= \Big(x(b+c)\big[(a+c)(B-C)-a(A-C)\big]+a\big[(b+c)(A-C)-b(B-C)\big]\Big)\cdot\big(a(A-C)+b(B-C)\big) =$
$= x(b+c)\big[a^2b(a+c)-a^2b^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(a(a+c)-ab)\big]+$
$+a\big[ab^2(b+c)-a^2b^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b(b+c)-ab)\big] =$
$= \frac{1}{2}xa(b+c)(a+c-b)\big[2ab+a^2+b^2-c^2\big]+\frac{1}{2}ab(b+c-a)(2ab+a^2+b^2-c^2) =$
$= \frac{1}{2}a(2ab+a^2+b^2-c^2)\big(x(b+c)(a+c-b)+b(b+c-a)\big) = 0$ dla $x = -\frac{b(b+c-a)}{(b+c)(a+c-b)}$, co dowodzi twierdzenia.

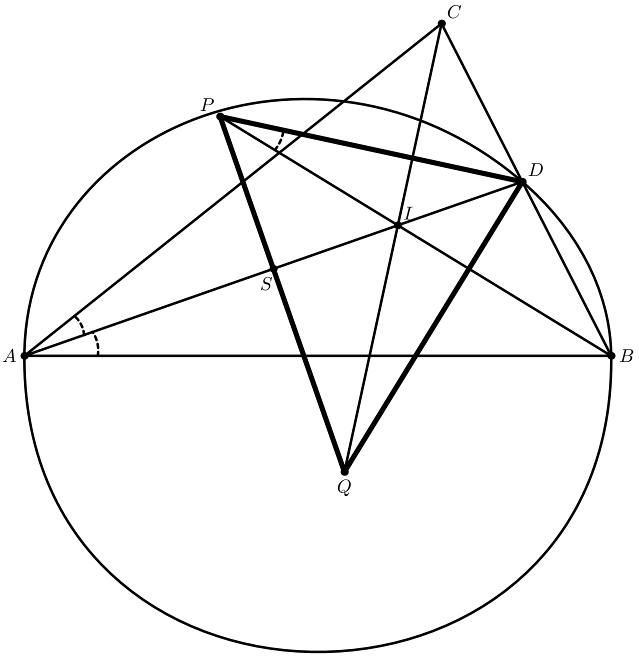
Ten dowód jest długawy, ale z drugiej strony dosyć bezmyślny, więc możliwy do przeprowadzenia w domu. W czasie zawodów w ograniczonym czasie dostępny tylko dla tych, którzy potrafią swoje obliczenia sensownie organizować. Może jednak warto uczyć młodych ludzi sensownego zapisywania swych myśli. Rozwiązanie trygonometryczne (poniżej) jest krótsze, też bez pomysłów, ale wymaga nieco lepszej znajomości trygonometrii. Najkrótsze, rozwiązanie (na stronie Olimpiady Matematycznej) jest oparte na pomyśle, który w miarę łatwo przychodzi do głowy tym, którzy zajmują się intensywnie geometrią elementarną w wydaniu klasycznym, ale trudnym dla innych osób.

Rozwiązanie trygonometryczne

Trygonometria jest w pewnym sensie oczywistym pomysłem: w zadaniu występują kąty w trójkątach (dwusieczne, wysokości) i to w założeniach i w tezie twierdzenia, które mamy udowodnić.

Załóżmy, że średnica okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równa 1 — to nie wpływa na ogólność rozważań, bo można zastąpić dany trójkąt podobnym do niego. Oznaczmy kąty trójkąta ABC literami α, β i γ. Z twierdzenia sinusów wynika, że $AB = \sin\gamma$, $BC = \sin\alpha$, $CA = \sin\beta$.

[2] Zamieniejąc b z c i jednocześnie B z C otrzymujemy $y = -\frac{c(b+c-a)}{(b+c)(a+b-c)}$ i $Q = yI+(1-y)C$, ale ten rezultat nie będzie nam potrzebny.



Kąt ostry między dwusiecznymi wychodzącym z wierzchołków A i B jest równy $\frac{\alpha+\beta}{2}$, a kąt ADB — $\gamma+\frac{\alpha}{2}$, więc

$BD = \frac{\sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})}$,

$AI = \frac{\sin\gamma\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$,

$DI = \frac{\sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})}$,

Mamy $\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}+\gamma < \pi-\frac{\alpha}{2}$, więc $\sin\frac{\alpha}{2} < \sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)$, zatem $DI < AI$ i wobec tego

$SI = AI - AS = AI - \frac{AI+ID}{2} = \frac{AI-ID}{2} =$

$= \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}\big(\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)-\sin\frac{\alpha}{2}\big) = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} = \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}.$

$QS = SI\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} = SI\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} =$

$$= \frac{\sin\beta\sin\gamma\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2}AD\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = SD\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Wobec tego $\sphericalangle SDQ = \frac{\gamma}{2}$, więc $\sphericalangle DIB + \sphericalangle SDQ = \frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90^\circ$, zatem $BI \perp DQ$, co dowodzi, że prosta BI zawiera wysokość trójkąta DPQ zaczynającą się w wierzchołku P, więc I jest punktem wspólnym dwu wysokości trójkąta PQD, więc jest jego ortocentrum . □

7. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q leżą odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$, przy czym $AP = CD$, $AQ = BC$. Wykazać, że środek odcinka PQ leży na prostej AC.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności rozważań można założyć, że promień okręgu jest równy 1. Wtedy istnieją takie liczby $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma < \delta < 2\pi$, że $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B = (\cos\beta, \sin\beta)$, $C = (\cos\gamma, \sin\gamma)$ i $D = (\cos\delta, \sin\delta)$. Wtedy $AB = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, $BC = 2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}$, $CD = 2\sin\frac{\delta-\gamma}{2}$ i $DA = 2\sin\frac{\delta-\alpha}{2}$. Stąd

$P - A = \frac{2\sin\frac{\delta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}\big(\cos\beta-\cos\alpha, \sin\beta-\cos\alpha\big) = 2\sin\frac{\delta-\gamma}{2}\big(-\sin\frac{\beta+\alpha}{2}, \cos\frac{\beta+\alpha}{2}\big) =$

$= \big(\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2}, \sin\frac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2}\big)$ i analogicznie

$Q - A = \frac{2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{2\sin\frac{\delta-\alpha}{2}}\big(\cos\delta-\cos\alpha, \sin\delta-\sin\alpha\big) = 2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\big(-\sin\frac{\delta+\alpha}{2}, \cos\frac{\delta+\alpha}{2}\big) =$

$= \big(\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2}, \sin\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2}\big).$

Stąd wynika, że

$\frac{1}{2}(P+Q)-A=\frac{1}{2}\big(\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2},\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2}\big)=$

$=\big(\sin\frac{\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2},\sin\frac{\delta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\big)=\sin\frac{\delta-\beta}{2}\big(-\sin\frac{\alpha+\gamma}{2},\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\big).$

Wystarczy dowieść, że otrzymany wektor jest równoległy do wektora

$C-A=\big(\cos\gamma-\cos\alpha,\sin\gamma-\sin\alpha\big)=2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\big(-\sin\frac{\gamma+\alpha}{2},\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\big)$, ale to jest oczywiste. □

8. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a<b$. Dowieść, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite p,q,r,s, że $a<\frac{p}{q}<\frac{r}{s}<b$ oraz $p^2+q^2=r^2+s^2$.

Rozwiązanie

Zaczniemy od wykazania, że każdy łuk okręgu jednostkowego o środku $O=(0,0)$ zawiera punkt o obu współrzędnych wymiernych. Zauważmy, że dla każdej naturalnej liczby n punkt $\left(\frac{n^2-1}{n^2+1},\frac{2n}{n^2+1}\right)$ leży na okręgu jednostkowym i zachodzi nierówność $\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right)^2+\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2=\frac{4(n^2+1)}{(n^2+1)^2}<\frac{4}{n^2}$.
Przypomnijmy (studia) też, że obrazem punktu $P=(x,y)$ w obrocie wokół punktu $(0,0)$ o kąt γ jest punkt $P(\gamma)=(x\cos\gamma-y\sin\gamma,x\sin\gamma+y\cos\gamma)$. To można uzasadnić za pomocą rysunku, a można też „algebraicznie": jeśli $x=\varrho\cos\varphi$ i $y=\varrho\sin\varphi$ (współrzędne biegunowe), to

$$P(\gamma)=\varrho\big(\cos(\varphi+\gamma),\sin(\varphi+\gamma)\big)=\big(\varrho\cos\varphi\cos\gamma-\varrho\sin\varphi\sin\gamma,\varrho\cos\varphi\sin\gamma+\varrho\sin\varphi\cos\gamma\big)=$$
$$=(x\cos\gamma-y\sin\gamma,x\sin\gamma+y\cos\gamma).$$

Z tych wzorów wynika, że jeśli liczbami wymiernymi są współrzędne punktu $P=(x,y)$ i liczby $\cos\gamma$ oraz $\sin\gamma$, to również współrzędne punktu $P(\gamma)$ są wymierne.

Niech $\gamma_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ będzie takim kątem, że $\cos\gamma_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}$ i $\sin\gamma_n=\frac{2n}{n^2+1}$, a $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ takie kąty, że $a=\operatorname{ctg}\alpha$ i $b=\operatorname{ctg}\beta$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\gamma_n=0$ i $\gamma_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, więc również $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$ i wobec tego istnieje taka liczba m, że $0<\gamma_m<\frac{\alpha-\beta}{2}$. Stąd wynika, że istnieje takie $k\in\mathbb{N}$, że $\beta<k\gamma_m<(k+1)\gamma_m<\alpha$. Z podanych definicji i otrzymanych nierówności wynika od razu, że współrzędne punktów

$$(\cos(k\gamma_m),\sin(k\gamma_m))\ \text{i}\ (\cos((k+1)\gamma_m),\sin((k+1)\gamma_m))$$

są wymierne i oczywiście

$$\operatorname{ctg}\alpha<\operatorname{ctg}((k+1)\gamma_m)<\operatorname{ctg}(k\gamma_m)<\operatorname{ctg}\beta.$$

Stąd teza natychmiast wynika: wystarczy pomnożyć wszystkie cztery współrzędne obu punktów $(\cos(k\gamma_m),\sin(k\gamma_m))$ i $(\cos((k+1)\gamma_m),\sin((k+1)\gamma_m))$ przez ich wspólny mianownik, by otrzymać punkty o współrzędnych całkowitych spełniające żądany warunek. □

9. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a,b równanie

$$(x^2-y^2-a)(x^2-y^2-b)(x^2-y^2-ab)=0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x,y.

Rozwiązanie

Jeśli liczba a jest nieparzysta, to przyjmując $x=\frac{a+1}{2}$, $y=\frac{a-1}{2}$ otrzymujemy $x^2-y^2-a=0$. Podobnie, gdy b jest liczbą nieparzystą, para liczb całkowitych $x=\frac{b+1}{2}$, $y=\frac{b-1}{2}$ spełnia równanie $x^2-y^2-b=0$. Jeśli obie liczby a i b są parzyste, to para liczb całkowitych $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$ spełnia równanie $x^2-y^2-ab=0$. W każdym z trzech przypadków wskazaliśmy parę liczb całkowitych spełniającą równanie $(x^2-y^2-a)(x^2-y^2-b)(x^2-y^2-ab)=0$. □

Komentarz: $x^2-y^2-a=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x-y)(x+y)=1\cdot a$, co sugeruje rozwiązanie układu równań $x-y=1,\ x+y=a$.

10. Dana jest liczba całkowita dodatnia k. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której zbiory $A=\{1^2,2^2,3^2,\dots\}$ i $B=\{1^2+n,2^2+n,3^2+n,\dots\}$ mają dokładnie k wspólnych elementów.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że liczba $n = 3^{2k-1}$ spełnia warunki zadania. W tym celu należy sprawdzić, że istnieje dokładnie k par liczb całkowitych dodatnich (a, b), dla których zachodzi wzór $a^2 = b^2 + 3^{2k-1}$. Równość $3^{2k-1} = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ jest równoważna temu, że dla pewnego $l \in \{0, 1, 2, ..., k - 1\}$ mamy $a - b = 3^l$ oraz $a + b = 3^{2k-1-l}$, czyli $a = \frac{1}{2}\left(3^{2k-1-l} + 3^l\right)$ oraz $b = \frac{1}{2}\left(3^{2k-1-l} - 3^l\right)$. Wobec tego par (a, b) o powyższych własnościach jest dokładnie k. □

11. Dowieść, że liczba $\sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie

Niech

$x = \sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{3} = \left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right) = \sqrt{5}\left(\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-1\right).$

Wtedy

$$x\left(\sqrt{2}+1\right) = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

Wobec tego

$$x^2\left(3+2\sqrt{2}\right) = x^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2 = 8-2\sqrt{15}.$$

Mamy więc $2x^2\sqrt{2} = 8 - 3x^2 - 2\sqrt{15}$. Po podniesieniu ostatniej równości stronami do kwadratu otrzymujemy

$$8x^4 = (8 - 3x^2)^2 - 4(8 - 3x^2)\sqrt{15} + 60.$$

Jeżeli x jest liczbą wymierną, to liczba $(8 - 3x^2)^2 + 60 - 8x^4$ jest wymierna. Jeśli $8 - 3x^2 \neq 0$, to $\sqrt{15} = \frac{(8-3x^2)^2+60-8x^4}{4(8-3x^2)}$, co przeczy niewymierności liczby $\sqrt{15}$. Wynika stąd, że $8 - 3x^2 = 0$. Niech $x = \frac{p}{q}$, przy czym liczby całkowite p, q są względnie pierwsze. Otrzymujemy wzór $8q^2 = 3p^2$. Liczba q jest więc podzielna przez 3, czyli $q = 3r$ dla pewnej liczby całkowitej r. Wobec tego $8 \cdot 3 \cdot r^2 = p^2$, więc liczba p dzieli się przez 3, co jednak przeczy nieskracalności ułamka $\frac{p}{q}$. Okazało się, że liczba x nie może być wymierna, a to należało udowodnić. □

Komentarz: Jeśli $p_0 = 1$ i p_n oznacza n–tą liczbę pierwszą dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz

$$w_0\sqrt{p_0} + w_1\sqrt{p_1} + w_2\sqrt{p_2} + \ldots + w_n\sqrt{p_n} = 0$$

dla pewnego naturalnego n i pewnych liczb wymiernych $w_0, w_1, \ldots, w_n$, to $w_0 = w_1 = \ldots = w_n = 0$. To jest znane zadanie, publikowane dawno temu w *American Mathematical Monthly.* Jego rozwiązanie jest w zasadzie prawie takie samo jak prezentowane powyżej z istotną różnicą, która na poziomie szkolnym może być w pierwszej chili trudna do zaakceptowania. Zamiast zbioru liczb wymiernych rozpatrywać należy najmniejsze zbiory, które zawierają liczby wymierne oraz liczby $\sqrt{p_0}$, $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_s}$, w których wykonalne są cztery działania arytmetyczne, dla różnych liczb naturalnych $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i wykazywać zerowanie się coraz większej liczby wymiernych współczynników $w_0, \ldots$

12. Rozwiązać układ n równań z niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $n \geqslant 2$:

$$\begin{cases} 2x_1^3 + 4 = x_1^2(x_2 + 3) \\ 2x_2^3 + 4 = x_2^2(x_3 + 3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_{n-1}^3 + 4 = x_{n-1}^2(x_n + 3) \\ 2x_n^3 + 4 = x_n^2(x_1 + 3) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Z układu równań wynika od razu, że $x_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Można więc przepisać te równania w postaci

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{4}{x_1^2} - 3 = x_2 \\ 2x_2 + \frac{4}{x_2^2} - 3 = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_{n-1} + \frac{4}{x_{n-1}^2} - 3 = x_n \\ 2x_n + \frac{4}{x_n^2} - 3 = x_1 \end{cases}$$

Mamy teraz

$$2x + \frac{4}{x^2} - 3 - x = \frac{x^3+4-3x^2}{x^2} = \frac{(x+1)(x^2-4x+4)}{x^2} = \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2}.$$

Z tej równości wynika, że $x = 2x + \frac{4}{x^2} - 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -1$ lub $x = 2$. Znaleźliśmy więc dwa rozwiązania układu równań: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -1$ oraz $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2$. Udowodnimy, że innych rozwiązań nie ma.

Jeśli $x < -1$, to $2x + \frac{4}{x^2} - 3 < x$, zatem jeżeli $x_1 < -1$, to

$x_2 = 2x_1 + \frac{4}{x_1^2} - 3 < x_1$,

$x_3 = 2x_2 + \frac{4}{x_2^2} - 3 < x_2 < x_1 < -1$,

....

$x_n = 2x_{n-1} + \frac{4}{x_{n-1}^2} - 3 < x_{n-1} < \ldots < x_3 < x_2 < x_1 < -1$,

$x_1 = 2x_n + \frac{4}{x_n^2} - 3 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_3 < x_2 < x_1 < -1$,

zatem $x_1 < x_1$, co jest niemożliwe. Nie ma więc rozwiązań, w których $x_1 < -1$. Takie samo rozumowanie w wypadku $-1 < x_1 \neq 2$ daje wynik $x_1 < x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_1$, co znów nie jest możliwe. Nieostre nierówności pojawiły się, bo może zdarzyć się, że $x_i = 2$ dla pewnego $i \in \{2, \ldots n\}$ (gdy $x_{i-1} = \frac{1}{4}\big(1 \pm \sqrt{17}\,\big)$) i wtedy otrzymujemy wzory: $2 = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_n = x_1$.

Udowodniliśmy, że jedynymi rozwiązaniami układu równań są dwa wskazane wyżej. □

Komentarz: To szczególny przypadek pytania o punkty okresowe funkcji f. W tym wypadku funkcji zdefiniowanej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + \frac{4}{x^2} - 3$. Funkcję można zmieniać i wtedy otrzymujemy inne zadania o bardzo różnej trudności. Najbardziej rozreklamowane to pytanie o punkty okresowe funkcji $ax(1-x)$. Jeśli $0 < a \leqslant 4$, to funkcja ta przekształca przedział $[0,1]$ w siebie. Dla $a \leqslant 1$ jedynym punktem stałym jest 0, dla $x > 0$ spełniona jest nierówność $f(x) = ax(1-x) < x$ i wszystkie inne punkty dążą do tego punktu stałego (jeśli $1 \geqslant x_1 > 0$ i $x_{n+1} = f(x_n)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$). Gdy zwiększamy a pojawia się w przedziale $[0,1]$ następny punkt stały $\frac{a-1}{a}$ i sytuacja zaczyna się komplikować. Nie będę w chodzić w szczegóły. Dla $a = 4$ punkty okresowe są gęste i dzieją się dziwne rzeczy. Istnieją trajektorie gęste w całym przedziale. Duży wpływ na zachowanie się trajektorii tej funkcji ma pochodna w punktach stałych i ogólniej okresowych: $f'(x) = a(1-2x)$, więc $f'(0) = a$ i $f'(\frac{a-1}{a}) = 2 - a$. Jeśli $1 < a \leqslant 2$, to punkt stały jest „przyciągający" i jeśli startujemy z punktu znajdującego się w przedziale $(0, \frac{a-1}{a})$, to pozostajemy w tym przedziale, choć zbliżamy się do jego prawego końca, ale jeśli $2 < a \leqslant 4$, to sytuacja zmienia się, bo pochodna staje się liczbą ujemną i punkty z jednej strony punktu stałego są wysyłane na drugą. To jeszcze daje się badać całkowicie elementarnie dla $a < 3$. Potem zaczynają się poważniejsze trudności, bo oba punkty stałe odpychają punkty znajdujące się w ich pobliżu, w wyniku czego powstają orbity okresowe i robi się ich coraz więcej. Wielu matematyków badało zachowanie się orbit takich funkcji i nie wszystko jest jasne, zwłaszcza, jeśli zajmiemy się liczbami zespolonymi.