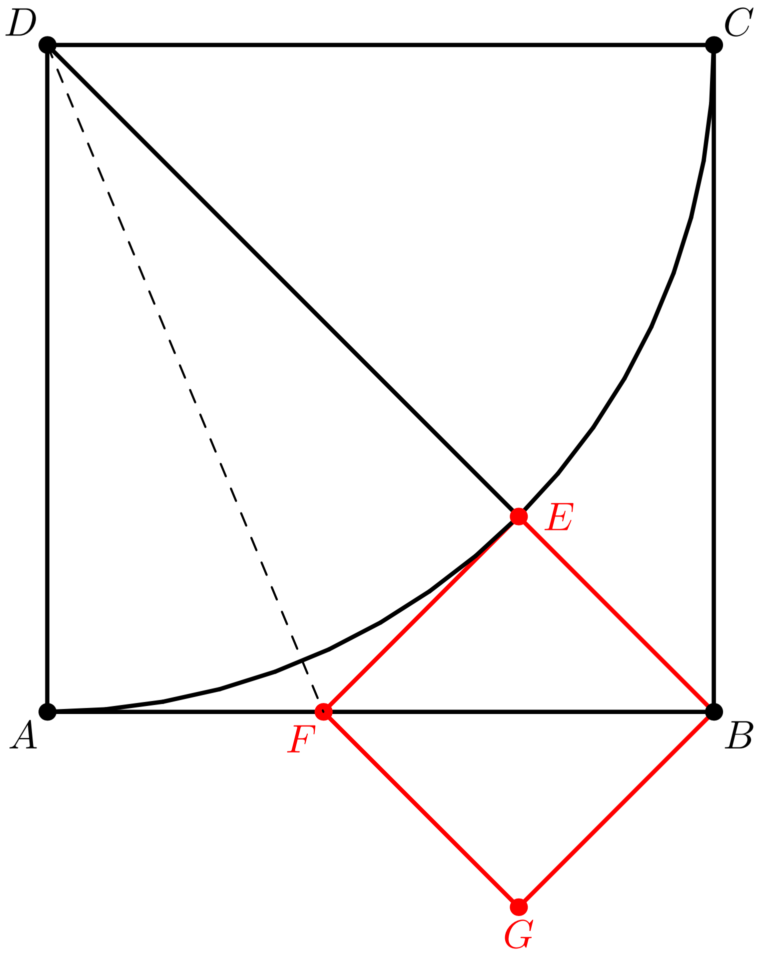
John von Neumann (1903 – 1957): *If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.*

John von Neumann: *By and large it is uniformly true that in mathematics there is a time lapse between a mathematical discovery and the moment it becomes useful; and that this lapse can be anything from 30 to 100 years, in some cases even more; and that the whole system seems to function without any direction, without any reference to usefulness, and without any desire to do things which are useful.*

Od ułamków łańcuchowych przez twierdzenie Liouville'a do liczb przestępnych

Pitagoras (569 – 475 p.n.e.) lub któryś z jego uczniów odkrył istnienie liczb, których nie można było zapisać w postaci ilorazu dwu liczb całkowitych. Wtedy był to poważny problem, bo nie zgadzało się to z głoszonymi teoriami. Ponoć próbowano rzecz zachować w tajemnicy, ale jakoś nie wyszło (prawda ma tendencja do wychodzenia na jaw). W tamtych czasach wszystko sprowadzano do geometrii, choć jeszcze nie została ona przedstawiona w formie aksjomatycznej. Zapewne pierwszą liczbą niewymierną odkrytą przez Greków był $\sqrt{2}$, ale nawet to nie jest całkiem pewne, bo przy okazji konstruowania dwunastościanu foremnego mogli natknąć się na $\sqrt{5}$. Geometrycznie niewymierność liczby $\sqrt{2}$ można uzasadnić bardzo prosto.

Geometryczne uzasadnienie tego, że bok i przekątna kwadratu są niewspółmierne, czyli że nie istnieje odcinek, którego kopiami można pokryć dokładnie zarówno bok jak i przekątną kwadratu polega na pokazaniu, że jeśli byłoby to możliwe, to udałoby się też to z kwadratem o boku ponad dwukrotnie mniejszym boku bez zmiany odcinka, którym mierzymy oba obiekty.



$FE \perp BE$, bo styczna do okręgu jest prostopadła do promienia;
$BE = EF$, bo $\sphericalangle EBF = \sphericalangle BFE = 45°$;
$AF = FE$, trójkąty prostokątne DAF i DEF mają wspólną przeciwprostokątną DE i równe

przyprostokątne DA, DE.

Załóżmy, że istnieje wspólna miara dla boku i przekątnej kwadratu, czyli taki odcinek, za pomocą którego można zmierzyć dokładnie zarówno bok jak i przekątną kwadratu. Zmierzyć dokładnie oznacza, że można go odłożyć całkowitą liczbę razy w boku i w przekątnej wypełniają te odcinki bez reszty oczywiście odcinki wzorcowe użyte do mierzenia mogą stykać się końcami, ale żaden z nich nie może zachodzić na drugi. Załóżmy, że $ABCD$ jest kwadratem o przekątnych AC i BD — oznaczenia jak na rysunku. Czworokąt $EFGB$ jest kwadratem, którego bok jest ponad dwa razy krótszy od boku wyjściowego kwadratu, bo $AF = EF < FB$. Jego bok $BE = BD - DE$ oraz przekątną $FB = AB - AF$ można zmierzyć dokładnie za pomocą tej samej miary, którą można było zmierzyć bok i przekątną kwadratu $ABCD$. To prowadzi do sprzeczności, bo tę samą procedurę można zastosować do kwadratu $ECGF$ i otrzymać kwadrat o boku ponad czterokrotnie krótszym od AB itd. Procedurę znów można powtórzyć i to wiele razy. Miara cały czas jest ta sama, choć w końcu natrafimy na kwadrat o boku **krótszym** od owej miary.

W gruncie rzeczy kwestia wymierności liczb interesuje wyłącznie matematyków. Nie ma żadnego znaczenia dla inżynierów, ekonomistów, fizyków, biologów, chemików itp. Dla nich wszystkich ważniejsze jest przybliżenie liczby na tyle dokładne, by móc szacować interesujące ich wielkości w rozsądny sposób. Liczby wymierne są tu wygodne, bo można łatwo nimi operować, choć w istocie rzeczy zdecydowana większość współczesnych woli przybliżenia dziesiętne: 3,14 jest wygodniejsze na ogół od $\frac{22}{7}$, tym bardziej od $\frac{223}{71}$. Póki nie stosowano zapisu dziesiętnego wcale nie było jasne, dlaczego ktoś miałby preferować 3,14. W XVIII wieku ludzie zaczęli zajmować się tzw. ułamkami łańcuchowymi. Pokażemy na przykładzie, w czy sprawa. Mamy np.
$\frac{127}{48} = 2 + \frac{31}{48} = 2 + \frac{1}{1+\frac{17}{31}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{14}{17}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{14}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{2}{3}}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}$

$\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-1}{3}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{7}+1}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-1}{2}}} =$
$= 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{\sqrt{7}+1}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-2}{3}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{7}+2}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\sqrt{7}-2}}}}$, ale liczba $\sqrt{7} - 2$ pojawiła się wcześniej. Możemy więc od razu napisać wzór
$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\sqrt{7}-2}}}} = \sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\sqrt{7}-2}}}}}}}}$.
To postępowanie można kontynuować otrzymując nieskończony ułamek ułańcuchowy. „Urywając" go w kolejnych miejscach otrzymujemy kolejne przybliżenia liczby $\sqrt{7}$:
$\frac{2}{1}$, $2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}$, $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{5}{2}$, $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{8}{3}$, $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}} = \frac{37}{14}$, $\ldots = \frac{45}{17}$, $\ldots = \frac{82}{31}$, $\ldots = \frac{127}{48}$, $\ldots = \frac{590}{223}$, $\ldots$

Można tak postąpić z dowolną liczbą dodatnią x, czyli można napisać, że
$x = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\ldots}}}$, gdzie $a_0 \geqslant 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\ldots$ są liczbami całkowitymi.

W istocie rzeczy a_0 jest częścią całkowitą liczby x, czyli największą liczbą całkowitą, której wartość nie przekracza wartości liczby x ($a_0 \leqslant x < a_0 + 1$). Liczba a_1 to część całkowita liczby $\frac{1}{x-a_0}$. Podobnie liczba a_2 to część całkowita liczby $\dfrac{1}{\frac{1}{x-a_0} - a_1}$, itd.

Jeśli x jest liczbą wymierną, to ciąg (a_n) składa się ze skończenie wielu liczb, a jeśli $x \notin \mathbb{Q}$, to — z nieskończenie wielu. W dalszym ciągu zakładamy, że x **jest liczbą niewymierną,** by uniknąć pytań o długość ciągów (p_n) i (q_n).

Oznaczmy

$$\tfrac{p_0}{q_0} = a_0,\ \tfrac{p_1}{q_1} = a_0 + \tfrac{1}{a_1},\ \tfrac{p_2}{q_2} = a_0 + \tfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}},\ \ldots$$

Przyjmujemy tu, że

$$q_0 = 1 \quad \text{oraz że ułamki} \quad \tfrac{p_0}{q_0}, \tfrac{p_1}{q_1}, \tfrac{p_2}{q_2}, \ldots$$

mają całkowite liczniki i mianowniki. Można udowodnić, że ułamki te są nieskracalne, dzięki czemu liczby p_n, q_n są poprawnie zdefiniowane.

Można udowodnić, że zachodzą wzory rekurencyjne:

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \quad \text{oraz} \quad q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n.$$

Nie jest to trudne — indukcja. Wykorzystując te wzory można udowodnić, że

$$p_0 < p_1 < p_2 < \ldots \text{ i } q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$$

Łatwo można też wykazać, że dla każdego parzystego n zachodzi nierówność $\frac{p_n}{q_n} < x < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Korzystając z wzorów rekurencyjnych na p_{n+2} i q_{n+2} można też udowodnić, że dla każdego całkowitego $n \geqslant 0$, dla którego istnieje a_{n+1}, zachodzi równość $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$. Z tej równości wynika, że w przedziale o końcach $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ nie ma liczb postaci $\frac{r}{s} \neq x$, gdzie r, s są dodatnimi liczbami całkowitymi przy czym $s \leqslant q_{n+1}$. Poza tym zachodzi nierówność

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}\,.$$

Okazało się, ż każdą niewymierną liczbę można przybliżyć wymierną w taki sposób, by błąd był mniejszy od odwrotności kwadratu mianownika. To już nie jest całkiem oczywisty rezultat. To XVIII wiek. Jeszcze w 1851 r. J. Liouville zauważył, że prawdziwe jest następujące twierdzenie

Jeśli funkcja w jest wielomianem n–tego stopnia, o współczynnikach całkowitych, $n \geqslant 1$, a x_0 jego niewymiernym pierwiastkiem, to istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnych liczb całkowitych p, q zachodzi nierówność $|x_0 - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{C}{q^n}$.

Dowód jest bardzo prosty i zaraz go pokażę. Ważniejsze od niego jest sformułowanie i zapewne, gdyby nie wiele lat, w czasie których zajmowano się rozwijaniem liczb w ułamki łańcuchowe, takie twierdzenie nie przyszłoby nikomu do głowy. Ale najpierw dowód.

Wielomian w ma co najwyżej n różnych pierwiastków, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że przedział $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ nie zawiera żadnego pierwiastka, oczywiście poza x_0. Załóżmy, że $\frac{p}{q} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Wtedy $w(\frac{p}{q}) \neq 0$, zatem $q^n w(\frac{p}{q})$ jest liczbą całkowitą, różną od 0. Stąd wynika, że $q^n|w(\frac{p}{q})| \geqslant 1$. Wobec tego mamy

$$1 \leqslant q^n|w(\tfrac{p}{q})| = q^n|w(\tfrac{p}{q}) - w(x_0)|.$$

Dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność (korzystamy z tego, że $|\frac{p}{q}| \leqslant |x_0| + \delta$, co wynika z nierówności trójkąta: $|\frac{p}{q} - x_0| \geqslant |\frac{p}{q}| - |x_0|$)

$$\left| x_0^k - \left(\tfrac{p}{q}\right)^k \right| \leqslant \left| x_0 - \tfrac{p}{q} \right| \cdot \left(|x_0|^{k-1} + |x_0|^{k-2} \cdot |\tfrac{p}{q}| + |x_0|^{k-3} \cdot |\tfrac{p}{q}|^2 + \ldots + |\tfrac{p}{q}|^{k-1} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left| x_0 - \tfrac{p}{q} \right| \cdot k(|x_0| + \delta)^{k-1}.$$

Jeśli $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są kolejnymi współczynnikami wielomianu w, czyli gdy dla każdego x zachodzi równość $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ dla $x \in \mathbb{R}$ i gdy

$$L = |a_1| + 2|a_2|(|x_0| + \delta) + 3|a_3|(|x_0| + \delta)^2 + \ldots + k|a_k|(|x_0| + \delta)^{k-1},$$

to $1 \leqslant q^n \cdot |w(\frac{p}{q})| \leqslant q^n \cdot L \cdot \left| x_0 - \frac{p}{q} \right|$, więc przyjmując $C = \frac{1}{L}$ otrzymujemy tezę, dla

$\frac{p}{q} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Dla wszystkich $\frac{p}{q}$ otrzymamy ją zmniejszając w razie potrzeby tę liczbę, np. przyjmując, że $C = \frac{1}{L+\frac{1}{\delta}}$ (wtedy $C < \frac{1}{L}$ i $C < \delta$).

Niech $x_0 = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \ldots = 0{,}110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,000\ldots$ — kolejne jedynki pojawiają się na miejscach o numerach 1!, 2!, 3!, 4! itd. Wykażemy, że liczba x_0 **nie** jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że jest pierwiastkiem wielomianu stopnia $n \geqslant 1$. Istnieje wtedy taka liczba $C > 0$, że $|x_0 - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{C}{q^n}$. Niech $q = 10^{m!}$ i $\frac{p}{q} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots + \frac{1}{10^{m!}}$. Wtedy

$$\frac{C}{10^{n\cdot m!}} \leqslant |x_0 - \frac{p}{q}| < \frac{2}{10^{(m+1)!}},$$

zatem dla każdego m zachodzi nierówność

$$10^{m!(m+1-n)} \cdot C < 2,$$

co oczywiście możliwe nie jest, bo liczby $10^{m!(m+1-n)}$ mogą być dowolnie duże, wystarczy, by liczba m była ogromna.

Twierdzenie Liouville'a była wzmacniane kilkakrotnie.

Twierdzenie (Axel Thue, 1909) Jeśli x_0 jest niewymiernym pierwiastkiem wielomianu stopnia $d \geqslant 3$, o współczynnikach całkowitych, $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba $c > 0$, dla każdej liczby naturalnej q i każdej liczby całkowitej p, zachodzi nierówność $|x_0 - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{c}{q^{1+\varepsilon+d/2}}$.

Twierdzenie (Carl Siegel, 1920) Jeśli x_0 jest niewymiernym pierwiastkiem wielomianu stopnia $d \geqslant 3$, o współczynnikach całkowitych, $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba $c > 0$, dla każdej liczby naturalnej q i każdej liczby całkowitej p, zachodzi nierówność $|x_0 - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{c}{q^{2\sqrt{d}+\varepsilon}}$.

Twierdzenie (Klaus Roth 1955, medal Fieldsa 1958). Jeśli x_0 jest niewymiernym pierwiastkiem wielomianu dodatniego stopnia o współczynnikach całkowitych, $\varepsilon > 0$, to istnieje takie $c > 0$, że dla każdej liczby naturalnej q i każdej liczby całkowitej p, zachodzi nierówność $|x_0 - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$. (nieefektywne wzmocnienie twierdzenia Liouville'a z 1851 r.).

Dodajmy, że rozważane są również ułamki łańcuchowe „funkcyjne". Można próbować przedstawiać funkcje w postaci takich ułamków. Robiono to już w XVIII w. Doprowadziło to niemieckiego matematyka, J. Lamberta, do dowodu niewymierności liczby π. To twierdzenie jest rozpowszechniane w szkołach, bo matematycy je lubią, a wynik tych działań dydaktycznych jest (nie tylko w Polsce) raczej śmieszny, bo większość nieszczęśników zapamiętuje, że liczba $\frac{314}{100}$ jest niewymierna. W dodatku żadnego wniosku z tego twierdzenia nie ma w żadnym podręczniku. Twierdzenie było i jest interesujące dla matematyków i niektórych fizyków (teoretyków) i nikogo więcej nie obchodzi. Jednak w XVIII w. dowód był istotnym krokiem w rozwoju matematyki. Nie przypominał on w niczym rozumowań uzasadniających niewymierność $\sqrt{2}$. W jakimś bardzo ogólnym sensie przypominał dowód niewymierności liczby e, o którym tu nie wspominam, ale jest znacznie łatwiejszy od opisanego niżej dowodu niewymierności π.

Dowód Lamberta skrócił, „wyczyścił" i uwspółcześnił Miklós Laczkovicz z Budapesztu (The American Mathematical Monthly, vol. 104, No 5, May 1997, pp. 439–443), a jeszcze wcześniej Gauss i inni. Tekst poniżej to w zasadzie tłumaczenie pracy Laczkovicza z nieistotnymi zmianami, dokładniej jej fragmentów. W rozumowaniu Lamberta nie było luk, to był pełny, poprawny dowód, ale to zrozumiano po kilkudziesięciu latach, w pierwszej chwili nie zrozumiano tej pracy do końca, co było spowodowane głównie tym, że jeszcze nie było ścisłych definicji granicy ciągu, funkcji i podobnych pojęć.

Zdefiniujemy pomocnicze funkcje:

$$f_k(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot k} + \frac{x^4}{2^4 \cdot k \cdot (k+1) \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot 3!} + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot k(k+1) \dots (k+n-1)} \cdot \frac{x^{2n}}{n!},$$
gdzie k oznacza dowolną liczbę (zespoloną) oczywiście z wyjątkiem $0, -1, -2, \dots$.

Sumy nieskończone nie zawsze mają sens, ale w tym wypadku mają i to dla każdej liczby rzeczywistej (a nawet każdej zespolonej) x, co wynika z tego, że
$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)} \cdot k(k+1) \dots (k+n)} \cdot \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot k(k+1) \dots (k+n-1)} \cdot \frac{x^{2n}}{n!}} \right| = \left| \frac{x^2}{4(k+n)(n+1)} \right| < \frac{1}{4}$$
dla $n > 1 + |k| + |x^2|$

Otrzymujemy m. in. wzory
$$f_{1/2}(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{x^4}{2^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 3!} + \dots =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \cos x,$$
a także
$$f_{3/2}(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot \frac{3}{2}} + \frac{x^4}{2^4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 3!} + \dots =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{x^6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \frac{\sin x}{x}.$$

Te wzory oczywiście nie pojawiają się w szkołach (z wyjątkiem klas nauczycieli uczących w rzeczywistości na poziomie uniwersyteckim, ale nie są trudne do uzyskania. Wypisywano w czasach Newtona i Leibniza, a tego, co potrafili robić z takimi sumami nieskończonymi Euler czy Gauss, większość kończących dziś studia matematyczne, nie potrafi. Dowody tych dwóch wzorów są łatwe i studenci matematyki poznają w pierwszym semestrze.

Możemy napisać teraz równość $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{f_{3/2}(x)}{f_{1/2}(x)}$, co może wyglądać dziwnie w pierwszej chwili, ale niebawem się okaże, że chodzi o zapisanie funkcji tangens w postaci ułamka łańcuchowego. Kontynuujemy przygotowania:
$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = \frac{x^2}{2^2 \cdot 1!} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) +$$
$$+ \frac{x^6}{2^6 \cdot 3!} \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) - \frac{x^8}{2^8 \cdot 4!} \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \right) + \dots =$$
$$= \frac{x^2}{4k(k+1)} \left(1 - \frac{x^2}{k+2} + \frac{x^4}{2!(k+2)(k+3)} - \frac{x^6}{3!(k+2)(k+3)(k+4)} \right) + \cdots = \frac{x^2}{4k(k+1)} f_{k+2}(x),$$ czyli
$$\frac{x^2}{4k(k+1)} f_{k+2}(x) = f_{k+1}(x) - f_k(x)\,. \tag{U1}$$

Otrzymaliśmy wzór, który użyjemy w dowodzie niewymierności liczby π . Zauważmy jednak jeszcze, że można go przepisać w postaci $1 - \frac{f_k(x)}{f_{k+1}(x)} = \frac{x^2 f_{k+2}(x)}{4k(k+1) f_{k+1}(x)}$, czyli:
$$\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2 f_{k+2}(x)}{4k(k+1) f_{k+1}(x)}}\,. \tag{U2}$$

Korzystając wiele razy z wzoru (U2) (dla $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$) otrzymujemy:
$$\operatorname{tg} x = x \frac{f_{3/2}(x)}{f_{1/2}(x)} = \frac{x}{1 - \frac{x^2 \cdot f_{5/2}(x)}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot f_{3/2}(x)}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2 f_{5/2}(x)}{1 \cdot 3 \cdot f_{3/2}(x)}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3\left(1 - \frac{x^2 \cdot f_{7/2}(x)}{3 \cdot 5 \cdot f_{5/2}(x)}\right)}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2 f_{7/2}(x)}{5 \cdot f_{5/2}(x)}}} =$$
$$= \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 \cdot \left(1 - \frac{x^2 f_{9/2}(x)}{5 \cdot 7 \cdot f_{7/2}(x)}\right)}}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2 f_{9/2}(x)}{7 \cdot f_{7/2}(x)}}}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 \cdot (1 - \dots)}}}},$$

co wyraźnie sugeruje prawdziwość wzoru

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7\cdot(1-\ldots)}}}} = \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{3\cdot 5}}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{5\cdot 7}}{1-\ldots}}}}. \tag{U3}$$

Dla zakończenia dowodu należałoby wykazać, że ciąg otrzymany przez „urywanie" ułamka na coraz dalszych miejscach jest zbieżny do $\operatorname{tg} x$, ale tego nie zrobimy, choć trudne nie jest, bo z tego korzystać nie musimy.

Zauważmy, że prawie oczywistym jest

Lemat 1.

Dla każdej liczby zespolonej x wzór równość $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 1$.

Dowód. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n}}{n!} = 0$, więc istnieje taka liczba $K > 0$, że $\frac{|x|^{2n}}{n!} \leqslant K$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Stąd wynika, że $|\frac{x^{2n}}{2^n\cdot k(k+1)\ldots(k+n-1)n!}| \leqslant \frac{K}{k^n}$ dla każdego $k > 1$ i dowolnego $n \geqslant 1$. Możemy więc oszacować liczbę $|f_k(x) - 1|$ przez sumę szeregu geometrycznego o ilorazie $\frac{1}{k}$. Otrzymujemy $|f_k(x) - 1| \leqslant \frac{K}{k(1-\frac{1}{k})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, czyli tezę. ■

Lemat 2. (zasadnicza część rozumowania)

Jeśli $x \neq 0$ i $x^2 \in \mathbb{Q}$, to $f_k(x) \neq 0$ i $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \notin \mathbb{Q}$ dla $k \in \mathbb{Q} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Dowód. Niech $x \neq 0$, $x^2 \in \mathbb{Q}$ i $k \in \mathbb{Q} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Z wzoru (U1) wynika, że jeśli dwa kolejne wyrazy ciągu (f_{k+n}) są zerami, to wszystkie następne też — indukcja. To jednak jest niemożliwe dla $x \neq 0$, bo $\lim\limits_{n\to\infty} f_{k+n}(x) = 1$.

Załóżmy, że $f_k(x) = 0$ lub $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \in \mathbb{Q}$. Istnieją wtedy takie liczby całkowite a, b i taka liczba $y \neq 0$, że $f_k(x) = ay$ oraz $f_{k+1}(x) = by$. Nie wykluczamy tego, że jedna (ale nie dwie!) z liczb a, b jest zerem.

Niech $q > 0$ będzie taką liczbą naturalną, że $\frac{bq}{k}, \frac{kq}{x^2}, \frac{q}{x^2} \in \mathbb{Z}$. Niech $G_0(x) = f_k(x)$ oraz

$$G_n = \frac{q^n}{k(k+1)\ldots(k+n-1)} f_{k+n}(x) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Z równości $f_{k+n+1}(x) - f_{k+n}(x) = \frac{x^2}{4(k+n)(k+n+1)} f_{k+n+2}(x)$ wynika związek

$$\frac{x^2 q^{n+2} f_{k+n+2}(x)}{4k(k+1)\ldots(k+n)(k+n+1)} = \frac{(k+n)q^{n+2} f_{k+n+1}(x)}{k(k+1)\ldots(k+n)} - \frac{q^{n+2} f_{k+n}(x)}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}.$$

Mamy więc

$$G_{n+2} = \frac{4(k+n)q}{x^2} G_{n+1} - \frac{4q^2}{x^2} G_n = 4\left(\frac{kq}{x^2} + n\frac{q}{x^2}\right) G_{n+1} - 4\frac{q^2}{x^2} G_n.$$

Współczynniki przy G_{n+1} i G_n w ostatnim wzorze są całkowite, zatem wszystkie wyrazy ciągu (G_n) są całkowitymi wielokrotnościami liczby $y \neq 0$. Dla dostatecznie dużych n zachodzi $|f_{n+k}(x) - 1| < 1$, więc $f_{n+k}(x) \neq 0$, zatem $G_n \neq 0$. Ciąg całkowitych wielokrotności liczby y różnych od 0 nie jest zbieżny do 0, a oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = 0$. Doszliśmy do sprzeczności. Lemat został wykazany. ■

Wniosek 1. $\pi^2 \notin Q$.

Dowód. Załóżmy, że $\pi^2 \in Q$. Mamy $f_{1/2}(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, wbrew lematowi 2. Zakończyliśmy dowód niewymierności π, a nawet π^2. ■

Wniosek 2. Jeśli $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, to $\operatorname{tg} x \notin Q$.

Dowód. Ponieważ π jest niewymierne (wniosek 1), więc $\cos x \neq 0$. Z lematu 2. zastosowanego dla $k = \frac{1}{2}$ wynika, że liczba $\frac{f_{3/2}(x)}{f_{1/2}(x)} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ nie jest wymierna, więc z wymierności mianownika wynika niewymierność licznika. ■