John von Neumann (1903 – 1957): *If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.*

1. Niech t będzie liczbą z przedziału $(0,1)$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant \frac{2t}{2+t} \cdot (|a|+|b|)\,.$$

Autor zadania: Michał Strzelecki

Rozwiązanie pierwsze

Gdy $b=0$, to nierówność wygląda tak $|a|+|a| \geqslant \frac{2t}{2+t} \cdot |a|$, więc jest prawdziwa, gdyż $\frac{2t}{2+t} = 2-\frac{4}{2+t} < 2-\frac{4}{2+1} = \frac{2}{3} < 1$. W dalszym ciągu $b \neq 0$ i $x = \frac{a}{b}$. Po podzieleniu przez $|b|$ nierówność przyjmuje postać

$$|x+1+t|+|x+1-t| \geqslant \tfrac{2t}{2+t} \cdot (|x|+1). \qquad (1)$$

Jeśli $x \geqslant 0$, to nierówność (1) zmienia się w następującą $2(x+1) \geqslant \frac{2t}{2+t} \cdot (x+1)$, więc jest prawdziwa, bo $1 > \frac{2t}{2+t}$. Jeśli $0 > x \geqslant t-1$, to nierówność (1) ma postać $2(x+1) \geqslant \frac{2t}{2+t} \cdot (-x+1)$ czyli $4x+4+2tx+2t \geqslant -2tx+2t$, tzn. $4x(1+t) \geqslant -4$, a ta ostatnia jest prawdziwa, bo $x(1+t) \geqslant (t-1)(t+1) = t^2-1 > -1$. Jeśli $t-1 > x \geqslant -(t+1)$, to nierówność (1) wygląda tak $2t \geqslant \frac{2t}{2+t}(1-x)$, a to jest prawdą, bo $\frac{2t}{2+t}(1-x) = 2t\frac{1-x}{2+t} < 2t\frac{1-(t-1)}{2+t} = 2t\frac{2-t}{2+t} < 2t$. Ostatni przypadek to $-(t+1) \geqslant x$. Tym razem mamy udowodnić, że $-2(x+1) \geqslant \frac{2t}{2+t}(1-x)$. Ta nierówność jest równoważna nierówności $-\left(2-\frac{2t}{2+t}\right)x \geqslant 2+\frac{2t}{2+t}$, równoważnej nierówności $-4x \geqslant 4+4t$ tożsamej z uczynionym założeniem. RZW.

Inna redakcja.

Gdy $b=0$, to nierówność wygląda tak $|a|+|a| \geqslant \frac{2t}{2+t}\cdot|a|$, więc jest prawdziwa, gdyż $\frac{2t}{2+t} = 2-\frac{4}{2+t} < 2-\frac{4}{2+1} = \frac{2}{3} < 1$. W dalszym ciągu $b \neq 0$ i $x=\frac{a}{b}$. Po podzieleniu przez $|b|$ nierówność przyjmuje postać

$$|x+1+t|+|x+1-t| \geqslant \tfrac{2t}{2+t}\cdot(|x|+1). \tag{1}$$

Z nierówności trójkąta ($|u+v| \leq |u|+|v|$ dla $u,v \in \mathbb{R}$) wynika, że

$$|x+1+t|+|x+1-t| \geqslant |x+1+t+x+1-t| = 2|x+1|$$

oraz

$$|x+1+t|+|x+1-t| = |x+1+t|+|-x-1+t| \geqslant$$
$$\geqslant |x+1+t-x-1+t| = 2t.$$

Wobec tego nierówność (1) zachodzi dla tych x, dla których $2|x+1| \geqslant \frac{2}{3}(|x|+1)$ lub $2t \geqslant \frac{2t}{2+t}(|x|+1)$ dla wszystkich $t \in (0,1)$. Nierówność $2|x+1| \geqslant \frac{2}{3}(|x|+1)$, czyli $3|x+1| \geqslant |x|+1$ zachodzi, gdy $x \geqslant -\frac{1}{2}$ oraz $x \leqslant -2$. Jeśli $|x| \leqslant 1$, to $2t \geqslant \frac{2t}{2+t}(|x|+1)$ dla wszystkich $t \in (0,1)$. Niech teraz $-2 < x < -1$. Mamy dowieść, że $|x+1+t|-x-1+t \geqslant \frac{2t}{2+t}(-x+1)$, czyli $|x+1+t| \geqslant x+1-t+\frac{2t}{2+t}(-x+1) =$

$$= \tfrac{1}{2+t}\left((2-t)x+2+t-t^2\right) = \tfrac{2-t}{2+t}\,(x+1+t).$$

To prawda, bowiem $0 < \frac{2-t}{2+t} < 1$ i $|x+1+t| \geqslant x+1+t$.

Trzecia redakcja (ze śladami geometrii jednowymiarowej)

Gdy $b=0$, to nierówność wygląda tak $|a|+|a| \geqslant \frac{2t}{2+t}\cdot|a|$, więc jest prawdziwa, gdyż $\frac{2t}{2+t} = 2-\frac{4}{2+t} < 2-\frac{4}{2+1} = \frac{2}{3} < 1$. W dalszym ciągu $b \neq 0$ i $x = \frac{a}{b}$. Po podzieleniu przez $|b|$ nierówność przyjmuje postać

$$|x+1+t| + |x+1-t| \geqslant \frac{2t}{2+t}\cdot(|x|+1). \qquad (1)$$

Liczba $|x+1+t|$ to odległość punktu x od punktu $-1-t$, a liczba $|x+1-t|$ to odległość punktu x od punktu $-1+t$. Definiujemy $f(x) = |x+1+t| + |x+1-t|$ i $g(x) = =\frac{2t}{2+t}\cdot(|x|+1)$. Wobec tego jeśli $x \in [-1-t, -1+t]$, to $f(x) = -1+t-(-1-t) = 2t$ — suma odległości punktu przedziału od końców tego przedziału równa jest jego długości. $|x|$ to odległość punktu x od punktu 0, zatem $2t = g(-1-t) \geqslant g(x) \geqslant g(-1+t) = \frac{2t}{2+t}\cdot(2-t) < 2t$. Wobec tego jeśli $-1-t \leqslant x \leqslant -1+t$, to $f(x)-g(x) \geqslant 0$. Jeśli $x > -1+t$, to

$$f(x) - f(-1+t) = 2(x-(-1+t)) = 2(x+1-t)$$

oraz

$$g(x) - g(-1+t) \leqslant \frac{2t}{2+t}(x-(-1+t)) < x-(-1+t) = \\ = x+1-t,$$

zatem

$$f(x)-g(x)-\big(f(-1+t)-g(-1+t)\big) \geqslant \\ \geqslant 2(x+1-t)-(x+1-t) = x+1-t > 0,$$

więc $f(x)-g(x) \geqslant \big(f(-1+t)-g(-1+t)\big)+(x+1-t) > 0$. Podobnie jeśli $x < -1-t$, to

$f(x) - f(-1-t) = 2(-1-t-x)$ oraz
$g(x) - g(-1-t) = \frac{2t}{2+t}(-1-t-x)$, więc
$f(x) - g(x) - \big(f(-1-t) - g(-1-t)\big) \geqslant$
$\geqslant 2(-1-t-x) - (-1-t-x) = -1-t-x > 0$,
zatem $f(x) - g(x) \geqslant 0 + (-1-t-x) > 0$, co kończy dowód. $\square$

Jak widać ostatnie uzasadnienie łatwiej jest zobaczyć niż zapisać.

Czwarta redakcja (najbliższa szkolnemu spojrzeniu na $|\ \ |$)

Gdy $b=0$, to nierówność wygląda tak $|a|+|a| \geqslant \frac{2t}{2+t}\cdot|a|$, więc jest prawdziwa, gdyż $\frac{2t}{2+t} = 2-\frac{4}{2+t} < 2-\frac{4}{2+1} = \frac{2}{3} < 1$. W dalszym ciągu $b \neq 0$ i $x = \frac{a}{b}$. Po podzieleniu przez $|b|$ nierówność przyjmuje postać

$$|x+1+t| + |x+1-t| \geqslant \tfrac{2t}{2+t}\cdot(|x|+1). \qquad (1)$$

Ustalamy $t \in (0,1)$. Niech

$$f(x) = |x+1+t| + |x+1-t| - \tfrac{2t}{2+t}\cdot(|x|+1).$$

Funkcja f jest liniowa na każdym z przedziałów:

$$(-\infty,-1-t],\ \ [-1,t,-1+t],\ \ [-1+t,0],\quad [0,\infty).$$

Mamy

$f(-2-t) = 1+|-1-2t|-\frac{2t}{2+t}\cdot(2+t+1) = 2-\frac{2t}{2+t} = \frac{4}{2+t}$,
$f(-1-t) = 0+2t-2t = 0$,
$f(-1+t) = 2t+0-\frac{2t}{2+t}(2-t) = 2t-2t\cdot\frac{2-t}{2+t} = \frac{4t^2}{2+t}$,
$f(0) = 1+t+1-t-\frac{2t}{2+t} = \frac{4}{2+t}$,
$f(1) = 2+t+2-t+\frac{2t}{2+t}\cdot(1+1) = \frac{8+4t}{2+t}$.

Wynika stąd, że

$$f(-2-t) > f(-1-t) = 0 < f(-1+t) < f(0) < f(1).$$

Wobec tego funkcja f maleje na półprostej $(-\infty,-1-t]$, a na każdym z przedziałów: $[-1-t,-1+t]$, $[-1+t,0]$, $[0,\infty)$ rośnie. Stąd teza wynika od razu. $\square$.

Rozwiązanie (uczniowskie z internetu, trochę zmienione)
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i $t \in (0,1)$ zachodzą nierówności:

$$(1)\quad |a+(1+t)b| + |a+(1-t)b| \geqslant \geqslant |a+(1+t)b+a+(1-t)b| = 2|a+b|,$$

$$(2)\quad |a+(1+t)b| + |a+(1-t)b| = = |a+(1+t)b| + |-a-(1-t)b| \geqslant \geqslant |a+(1+t)b-a-(1-t)b| = 2t|b|,$$

$$(3)\quad |a|+|b| = |a+b-b|+|b| \leqslant \leqslant |a+b|+|-b|+|b| = |a+b|+2|b|.$$

Jeśli $t|b| \geqslant |a+b|$, to z nierówności (3) otrzymujemy $|a|+|b| \leqslant |a+b|+2|b| \leqslant (t+2)|b|$, więc

$$\tfrac{2t}{2+t}(|a|+|b|) \leqslant \tfrac{2t}{2+t}\cdot(t+2)|b| = 2t|b|,$$

co w połączeniu z nierównością (2) dowodzi prawdziwości tezy w tym wypadku.

Załóżmy teraz, że $t|b| \leqslant |a+b|$. Z nierówności (3) otrzymujemy

$$\tfrac{2t}{2+t}(|a|+|b|) \leqslant \tfrac{2t}{2+t}\big(|a+b|+2|b|\big) = \tfrac{2t}{2+t}|a+b| + \tfrac{4t|b|}{2+t} \leqslant \leqslant \tfrac{2t}{2+t}|a+b| + \tfrac{4(|a+b|)}{2+t} = 2|a+b|,$$

co w połączeniu z nierównością (1) daje tezę w tym wypadku. $\square$

A teraz "firmówka"

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b oraz $t \in (0,1)$ zachodzą nierówności:

$$|a+(1+t)b| + |a+(1-t)b| \geqslant$$
$$\geqslant |a+(1+t)b+a+(1-t)b| = 2|a+b| \geqslant 2|a| - 2|b|$$

oraz

$$|a+(1+t)b| + |a+(1-t)b| =$$
$$= |a+(1+t)b| + |-a-(1-t)b| \geqslant$$
$$\geqslant |a+(1+t)b-a-(1-t)b| = 2t|b|.$$

Otrzymujemy wobec tego

$$(1) \quad |a+(1+t)b| + |a+(1-t)b| \geqslant 2|a| - 2|b|$$

oraz

$$(2) \quad |a+(1+t)b| + |a+(1-t)b| \geqslant 2t|b|.$$

Dodając do nierówności (1) pomnożonej przez $\frac{t}{2+t}$ nierówność (2) pomnożoną przez $\frac{2}{2+t}$ otrzymujemy

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant \tfrac{t}{2+t}\cdot(2|a|-2|b|)+\tfrac{2}{2+t}\cdot 2t|b| =$$
$$= \tfrac{2t}{2+t}(|a|+|b|),$$

czyli tezę. $\square$

2. *Rozstrzygnąć, czy istnieją takie trzy różne, niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, że spośród liczb*

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \quad \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}, \quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$$

pewne dwie są równe, a trzecia jest od nich różna.

Autor zadania: Kamil Rychlewicz

To łatwe zadanie, ale p. Łukasz Bożyk powiedział mi, że opublikowane na stronie OM rozwiązanie nie podoba mu się, a przede wszystkim nie podoba się p. Kamilowi Rychlewiczowi. O ile zrozumiałem podobałoby się im bardziej coś w rodzaju tekstu poniżej.

Rozwiązanie

Z równości $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$ wynika, że $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} = \frac{b^2-c^2}{b^3-c^3}$ — rozszerzyliśmy oba ułamki, a z tej równości wynika, że $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} = \frac{b^2-c^2}{b^3-c^3} = \frac{a^2-b^2+b^2-c^2}{a^3-b^3+b^3-c^3} = \frac{a^2-c^2}{a^3-c^3} = \frac{a+c}{a^2+ac+c^2}$, więc jeśli dwie są równe, to trzecia też. „Po drodze" skorzystaliśmy z tego, że

$\frac{w}{x} = \frac{y}{z} \iff \frac{w}{x} = \frac{w+y}{x+z}$, jeśli $x \neq 0,\ z \neq 0,\ x+z \neq 0$. $\square$

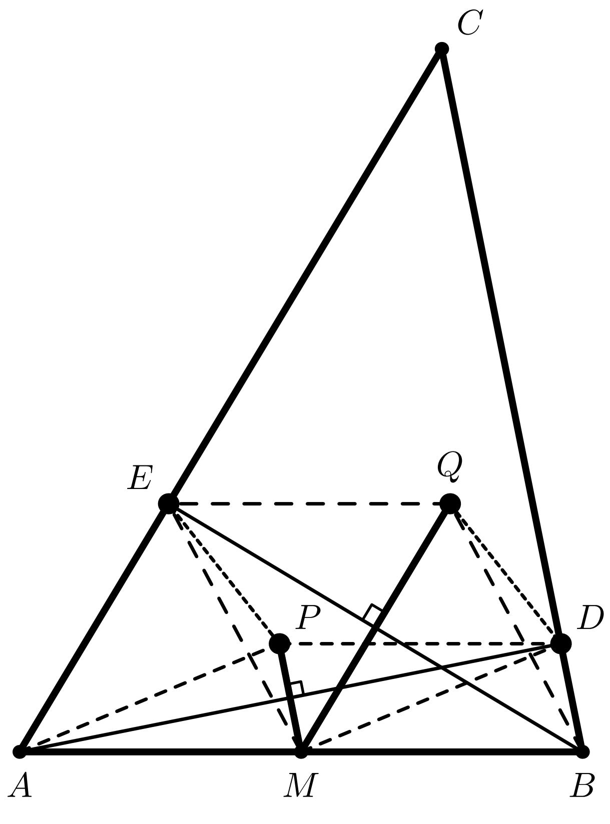
Jeszcze o zadaniu trzecim z tegorocznej OM (choć prof. W.G. już o nim mówił).

3. Odcinki AD, BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty P, Q są symetryczne do punktu M odpowiednio względem prostych AD, BE. Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie

W rozwiązaniu $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny lub iloczyn liczb.



Mamy $M = \frac{1}{2}(A+B)$ oraz
$(D-B)\cdot(D-A) = 0$,
$\big(P - \frac{1}{2}(A+B)\big)\cdot(D-A) = 0$,
$\frac{1}{2}(P + \frac{A+B}{2}) = A + s(D-A)$ dla pewnego $s \in \mathbb{R}$ (bo środek odcinka MP leży na prostej AD). Stąd

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(P - \tfrac{1}{2}(A+B)\right)\cdot(D-A) = \\
&= \left(-\tfrac{A+B}{2} + 2A + 2s(D-A) - \tfrac{1}{2}(A+B)\right)\cdot(D-A) = \\
&= (-B + A + 2s(D-A))\cdot(D-A) = \\
&= (D - B + A - D + 2s(D-A))\cdot(D-A) = \\
&= -(D-A)^2 + 2s(D-A)^2, \text{ zatem } 2s = 1 \text{ i wobec tego}
\end{aligned}
$$

$$
P = -\tfrac{A+B}{2} + 2A + 2s(D-A) = -\tfrac{A+B}{2} + 2A + D - A = \\
= D + \tfrac{A-B}{2}.
$$

Analogicznie $Q = E + \frac{B-A}{2}$. Wynika stąd od razu, że $\frac{1}{2}(P+Q) = \frac{1}{2}(D+E)$, więc środki odcinków PQ i DE pokrywają się.

Udowodniliśmy, czego oczekiwano nie korzystając z tego, że trójkąt jest ostrokątny. A nawet trochę więcej:

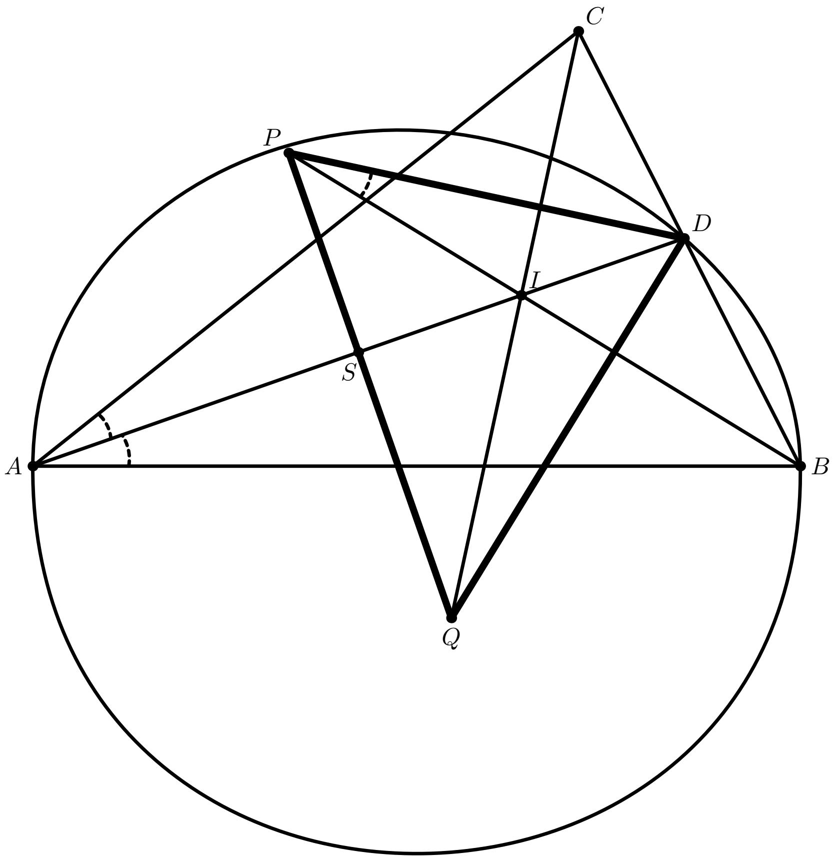
$$\tfrac{1}{2}(P+Q) = \tfrac{1}{2}(D+E),$$

ale to ostatnie zdanie choć prawdziwe, to jednak jest oszustwem. □

A teraz zadanie 8 z LXVII OM (poprzedni rok)

4. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

Rozwiązanie



Niech S będzie środkiem odcinka AD. Ponieważ AD jest dwusieczną, więc $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$. Stąd i z nierówności trójkąta wynika, że $BD = \frac{AB \cdot BC}{CA+AB} < \frac{AB \cdot BC}{CB} = AB$. Z twierdzenia o dwusiecznej wynika więc, że $\frac{DI}{IB} = \frac{DB}{AB} < 1$, więc punkt I leży między punktami S i D. Wobec tego leży też między punktami P i B oraz między punktami Q i C. Oznaczmy jak zwykle $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$. Z twierdzenia o sumie kątów trójkąta wynikają równości i nierówności $\sphericalangle AIP = \sphericalangle DIB = \frac{\alpha+\beta}{2} < 90°$, $\sphericalangle QIA = = \sphericalangle DIC = \frac{\alpha+\gamma}{2} < 90°$ i $\sphericalangle BIQ = \sphericalangle CIP = \frac{\beta+\gamma}{2} < 90°$. Wobec tego symetralna odcinka AD nie jest równoległa do dwusiecznej CI, więc Q jest jedynym punktem wspólnym tych prostych. Podobnie P jest jedynym punktem wspólnym prostej BI i symetralnej odcinka AD. Dwusieczna $BI^{\rightarrow}$ przecina okrąg opisany na trójkącie ABD w środku tego łuku L o końcach AD, który nie zawiera punktu B. Również symetralna cięciwy AD przechodzi przez ten środek. Stąd wynika, że punkt P jest środkiem łuku L, zatem na czworokącie $ABDP$ można opisać okrąg. Podobnie na czworokącie $AQDC$. Wynika stąd $\sphericalangle DPB = \sphericalangle DAB = \frac{\alpha}{2}$. Wobec tego $\sphericalangle DPI + \sphericalangle PIC = \sphericalangle DPB + \sphericalangle PIC = = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} = 90°$, a stąd wynika natychmiast, że prosta IC (czyli prosta QI) jest prostopadła do prostej PD, więc zawiera wysokość trójkąta PQD. Inną wysokością tego trójkąta jest odcinek DS, który zawiera punkt I. Oznacza to, że wysokości trójkąta PQD przechodzą przez punkt I. □

Uwaga. Trójkąt PQD jest ostrokątny, bo
$\sphericalangle DPQ = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\sphericalangle PQD = \frac{\alpha+\beta}{2}$ *i* $\sphericalangle QDP = \frac{\gamma+\beta}{2}$. □

A teraz pokażemy rozwiązanie trygonometryczne. Głównym narzędziem będzie twierdzenie sinusów, kiedyś znane każdemu (no może prawie) maturzyście.

Załóżmy, że średnica okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równa 1 — to nie wpływa na ogólność rozważań, bo można zastąpić dany trójkąt podobnym do niego. Oznaczmy kąty trójkąta ABC literami α, β i γ. Z twierdzenia sinusów wynika, że $AB = \sin\gamma$, $BC = \sin\alpha$, $CA = \sin\beta$. Kąt ostry między dwusiecznymi wychodzącym z wierzchołków A i B jest równy $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Mamy też $\sphericalangle ADB = \gamma + \frac{\alpha}{2}$, więc zachodzą równości

$BD = \frac{\sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})}$,

$$AI = \frac{\sin\gamma\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$DI = \frac{\sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})},$$

Mamy $\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} + \gamma < \pi - \frac{\alpha}{2}$, więc $\sin\frac{\alpha}{2} < \sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)$, zatem $DI < AI$ i wobec tego

$$SI = AI - AS = AI - \frac{AI+ID}{2} = \frac{AI-ID}{2} =$$

$$= \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}\left(\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma) - \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} = \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}.$$

Zajmiemy się trójkącikiem ISQ $(2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma)$

$$QS = SI\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} = SI\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} =$$

$$= \frac{\sin\beta\sin\gamma\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2}AD\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = SD\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Wobec tego $\sphericalangle SDQ = \frac{\gamma}{2}$, więc $\sphericalangle DIB + \sphericalangle SDQ = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90^\circ$, zatem $BI \perp DQ$, co dowodzi, że prosta BI zawiera wysokość trójkąta DPQ zaczynającą się w wierzchołku P, więc I jest punktem wspólnym dwu wysokości trójkąta PQD, więc jest jego ortocentrum . □

A teraz jeszcze jedno rozwiązanie. Będziemy dodawać, odejmować punkty płaszczyzny $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ i mnożyć je skalarnie: $(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$, więc iloczyn skalarny dwóch punktów traktowanych jako wektory o początku $(0, 0)$ jest liczbą.

Wektor (a, b) jest prostopadły do wektora (c, d) wtedy i tylko wtedy, gdy (twierdzenie Pitagorasa) $a^2+b^2+c^2+d^2 = =(a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2$, czyli gdy
$$(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd = 0.$$
Dla każdego punktu P prostej BI istnieje dokładnie jedna taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $P = I + x(B - I) = xB + (1 - x)I$. W dalszym ciągu P oznacza punkt z treści zadania.

Niech $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D$, czyli S jest środkiem odcinka AD. Znajdziemy taką liczbę x, że $(P - S) \cdot (D - A) = 0$, a potem sprawdzimy, że $(P - D) \cdot (C - I) = 0$, więc że I leży na wysokości trójkąta DPQ z wierzchołka P. Punkt I leży też na wysokości tego trójkąta z wierzchołka D. Dwie wysokości przechodzą przez punkt I, więc trzecia też.

Udowodnimy, że[1]
$(B-A)\cdot(C-A)=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$, $(A-B)\cdot(C-B)=$ $=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)$, $(A-C)\cdot(B-C)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$.

Mamy $a^2=(B-C)\cdot(B-C)=(B-A+A-C)\cdot$ $\cdot(B-A+A-C)=(B-A)\cdot(B-A)+$

$$+2(B-A)\cdot(A-C)+(A-C)\cdot(A-C)=$$

$=c^2+b^2-2(B-A)\cdot(C-A)$, więc otrzymaliśmy równość $(B-A)\cdot(C-A)=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$. Analogicznie uzasadniamy następne dwa wzory.

Z twierdzenia o dwusiecznej wynika od razu, że
$D=\frac{1}{b+c}(bB+cC)$,
$I=\frac{1}{a+b+c}(aA+bB+cC)=\frac{1}{a+b+c}\big(aA+(b+c)D\big)$.
Mamy też:

$S=\frac{1}{2}(A+D)=\frac{1}{2(b+c)}\big((b+c)A+bB+cC\big)$, a także
$P-I=x(B-I)=\frac{x}{a+b+c}\big(a(B-A)+c(B-C)\big)$,
$D-A=\frac{1}{b+c}\big(b(B-A)+c(C-A)\big)$,

$$I-S=\frac{1}{a+b+c}\big(aA+bB+cC\big)-\frac{1}{2(b+c)}\big((b+c)A+bB+cC\big)=$$
$$=\frac{b+c-a}{2(b+c)(a+b+c)}\big(b(B-A)+c(C-A)\big),$$

zatem ma być spełniona równość

$$0=(P-S)\cdot(D-A)=\big((P-I)-(S-I)\big)\cdot(D-A)=$$
$$=(P-I)(D-A)+(I-S)(D-A)=$$
$$=\frac{x(a(B-A)+c(B-C))}{a+b+c}\cdot\frac{b(B-A)+c(C-A)}{b+c}+$$
$$+\frac{(b+c-a)(b(B-A)+c(C-A))}{2(b+c)(a+b+c)}\cdot\frac{b(B-A)+c(C-A)}{b+c}=$$

[1] Te równości to w zasadzie twierdzenie kosinusów.

$$= \frac{x(abc^2+\frac{ac}{2}(b^2+c^2-a^2)+\frac{bc}{2}(a^2+c^2-b^2)-\frac{c^2}{2}(a^2+b^2-c^2))}{(b+c)(a+b+c)} + \\ + \frac{(b+c-a)(2b^2c^2+bc(b^2+c^2-a^2))}{2(b+c)^2(a+b+c)} =$$
$$= \frac{cx(2abc+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-c(a^2+b^2-c^2))}{2(b+c)(a+b+c)} + \\ + \frac{bc(b+c-a)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{2(b+c)^2(a+b+c)} =$$
$$= \frac{cx\Big(a(b+c)^2-a^3+(b-c)(a^2-bc-b^2-bc-c^2)\Big)}{2(b+c)(a+b+c)} + \frac{bc(b+c-a)((b+c)^2-a^2)}{2(b+c)^2(a+b+c)} =$$
$$= \Big((b+c)^2-a^2\Big)\Big(\frac{cx(a-(b-c))}{2(b+c)(a+b+c)} + \frac{bc(b+c-a)}{2(b+c)^2(a+b+c)}\Big) =$$
$$= \frac{c((b+c)^2-a^2)}{2(b+c)^2(a+b+c)}\Big(x(b+c)(a+c-b)+b(b+c-a)\Big),$$
więc $x = -\frac{b(b+c-a)}{(b+c)(a+c-b)}$ — uff! [2]

Mamy $P-D = xB+(1-x)I-D = x(B-I)+I-D =$
$$= \frac{x((a+c)B-aA-cC)}{a+b+c} + \frac{(b+c)(aA+bB+cC)-(a+b+c)(bB+cC)}{(b+c)(a+b+c)} =$$
$$= \frac{x(b+c)[(a+c)(B-C)-a(A-C)]+a[(b+c)(A-C)-b(B-C)]}{(b+c)(a+b+c)}$$
oraz $I-C = \frac{a(A-C)+b(B-C)}{a+b+c}$. Wobec tego
$$(b+c)(a+b+c)^2(P-D)(I-C) =$$
$$= \Big(x(b+c)\big[(a+c)(B-C)-a(A-C)\big] + \\ +a\big[(b+c)(A-C)-b(B-C)\big]\Big)\cdot\Big(a(A-C)+b(B-C)\Big) =$$
$$= x(b+c)\big[a^2b(a+c)-a^2b^2+\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(a(a+c)-ab)\big]+ \\ +a\big[ab^2(b+c)-a^2b^2+\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b(b+c)-ab)\big] =$$
$$= \tfrac{1}{2}xa(b+c)(a+c-b)\big[2ab+a^2+b^2-c^2\big] + \\ + \tfrac{1}{2}ab(b+c-a)(2ab+a^2+b^2-c^2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}a(2ab+a^2+b^2-c^2)\Big(x(b+c)(a+c-b)+b(b+c-a)\Big) = 0$$
dla $x = -\frac{b(b+c-a)}{(b+c)(a+c-b)}$, co dowodzi twierdzenia. $\square$

[2] Zamieniejąc b z c i jednocześnie B z C otrzymujemy $y = -\frac{c(b+c-a)}{(b+c)(a+b-c)}$ i $Q = yI + (1-y)C$, ale ten rezultat nie będzie nam potrzebny.

Ostatni dowód jest długawy, ale z drugiej strony dosyć bezmyślny, więc możliwy do przeprowadzenia w domu. W czasie zawodów w ograniczonym czasie dostępny tylko dla tych, którzy potrafią swoje obliczenia sensownie organizować. Może jednak warto uczyć młodych ludzi sensownego zapisywania swych myśli. Rozwiązanie trygonometryczne jest krótsze, też bez pomysłów, ale wymaga nieco lepszej znajomości trygonometrii. Najkrótsze, pierwsze rozwiązanie jest oparte na pomyśle, który w miarę łatwo przychodzi do głowy tym, którzy zajmują się intensywnie geometrią elementarną w wydaniu klasycznym, ale trudnym dla innych osób.

I coś na zakończenie. Jak wszyscy obecni wiedzą prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie 5000 orłów w 10 000 rzutów symetryczną monetą równe jest $\frac{10\,000!}{5\,000!\cdot 5\,000!}\cdot\frac{1}{2^{10\,000}}$. Wie to też spora część młodzieży, której udało się wejść w posiadanie zaświadczenia dokumentującego wiedzę pozwalającą rozpocząć studiowanie w celu osiągnięcia w przyszłości zarobków pozwalających na tzw. *godne życie.* Można zapytać takiego obywatela ile w przybliżeniu to prawdopodobieństwo jest równe. Standardowa odpowiedź to albo około $\frac{1}{2}$ albo – rzadziej – około 1, choć zdarzają się odpowiedzi typu małe. To w zasadzie dowodzi bezsensowności nauki RP w szkołach, ale przecież nikt takimi drobiazgami przejmować się nie będzie. Otóż można ich spróbować przekonać, że ta liczba nie jest taka, jak im się wydaje (oczywiście nie używając wzoru Stirlinga).

$p = \frac{10\,000!}{5\,000!\cdot 5\,000!}\cdot\frac{1}{2^{10\,000}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9997}{9998}\cdot\frac{9999}{1000}$,
zatem
$p^2 < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{9997}{9998}\cdot\frac{9998}{9999}\cdot\frac{9999}{10000}\cdot\frac{10000}{10001} = \frac{1}{10001}$,
więc $p^2 < \frac{1}{10001} < \frac{1}{10000}$, zatem $p < \frac{1}{100}$.

Mamy też
$p^2 > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9996}{9997}\cdot\frac{9997}{9998}\cdot\frac{9998}{9999}\cdot\frac{9999}{10000} = \frac{1}{20000}$,
więc $p^2 > \frac{1}{20000}$, zatem $p > \frac{1}{100\sqrt{2}} > \frac{1}{142}$.

Oba oszacowania, górne i dolne, mogą być poprawione, ale warto zauważyć, że $\frac{1}{100} - \frac{1}{142} = \frac{42}{14200} < \frac{42}{14196} = \frac{1}{338}$.