Zadania olimpijskie niezwykłej urody – PTM 100

Zadanie 10 z XXXIX OM: *Wiedząc, że* $x \in \langle 0;\pi/4\rangle$ *rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:*

$$\operatorname{tg}(\sin x) \quad \textit{czy} \quad \sin(\operatorname{tg} x).$$

W zasadzie to samo zadanie pojawiło się na zawodach studenckich w 2006 r. W tych zawodach uczestniczyło 241 studentów z różnych krajów. Zadanie uznano za niezbyt trudne i umieszczono na liście jako trzecie drugiego dnia (mania szeregowania zadań wg. trudności jest powszechna pomimo tego, że często wyniki demokratycznych ustaleń różnią się istotnie od statystyk po zawodach, egzaminie itp.). Bezbłędnie rozwiązało je 8 osób (w tym jeden student z Polski), i jeszcze 8 z pewnymi zastrzeżeniami. Okazało się, że spośród 12 zadań było trzecim na liście najtrudniejszych. Na zawodach studenckich miało taką treść:
Compare $\operatorname{tg}(\sin x)$ *and* $\sin(\operatorname{tg} x)$ *for all* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Można sprawdzić, jeśli ktoś nic lepszego akurat do roboty nie ma, że pochodne funkcji $\operatorname{tg}(\sin x)$ and $\sin(\operatorname{tg} x)$ w punkcie 0 pokrywają się aż do szóstej włącznie, co trochę wyjaśnia kłopoty rozwiązujących. Podaję rozwiązanie. Niech
$f(x) = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)$. Wtedy

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - \frac{\cos(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 x - \cos(\operatorname{tg} x)\cdot\cos^2(\sin x)}{\cos^2 x \cdot \cos^2(\operatorname{tg} x)}.$$

Niech $0 < x < \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}$. Z nierówności między średnimi i z wklęsłości funkcji kosinus na $(0, \frac{\pi}{2})$ wynika, że

$$\sqrt[3]{\cos(\operatorname{tg} x)\cdot\cos^2(\sin x)} < \frac{1}{3}\left[\cos(\operatorname{tg} x) + 2\cos(\sin x)\right] \leqslant \cos\left[\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3}\right] < \cos x\ ,$$

ostatnia nierówność zachodzi, bo

$$\left[\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3}\right]' = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x\right] > \sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x\cdot\cos x} = 1$$

,
więc $\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3} > x$. Wobec tego $\cos^3 x - \cos(\operatorname{tg} x)\cdot\cos^2(\sin x) > 0$, więc $f'(x) > 0$, zatem f rośnie na przedziale $[0, \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}]$. Kończymy stwierdzeniem (przypominamy, że $4 + \pi^2 < 16$)

$$\operatorname{tg}\left[\sin\left(\operatorname{arctg}\tfrac{\pi}{2}\right)\right] = \operatorname{tg}\frac{\pi/2}{\sqrt{1+\pi^2/4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1\ .$$

Dla $x \in [\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mamy więc $\operatorname{tg}(\sin x) > 1$, zatem $f(x) > 0$.
Jasne jest, że jeśli ktoś nie rozwiązywał zadania samodzielnie, a tylko szybko przeczytał rozwiązanie, w końcu krótkie i wykorzystujące jedynie dobrze znane fakciki, to rozumie, że jest to zadania proste. Mówię o tym, bo wiem od Autora zadania, że KG OM włączył to zadanie do konkursu nieświadomie – autorskie rozwiązanie zaprezentowane na zebraniu nie było poprawne, choć było „proste”.

Na finale XVI OM pojawiło się zadanie:
Udowodnić, że jeśli liczby a, b *są całkowite oraz* $2a^2 + a = 3b^2 + b$, *to liczby* $a - b$ *i* $2a + 2b + 1$ *są kwadratami liczb całkowitych.*
Było to zadanie czwarte, więc pierwsze drugiego dnia zawodów.

Mamy $b^2 = 2a^2 + a - 2b^2 - b = (a-b)(2a+2b+1)$. Jeśli liczba pierwsza p dzieli liczby $a-b$ oraz $2a+2b+1$, to dzieli liczbę b^2, więc $p \mid b$ oraz $p \mid \big(2a + 2b + 1 - 2(a-b)\big) - 4b = 4b + 1 - 4b = 1$, więc nie ma takiej liczby pierwszej. Stąd i z równości $b^2 = (a-b)(2a+2b+1)$ wynika, że każdy czynnik pierwszy liczby $a - b$ pojawia się w jej rozkładzie na czynniki pierwsze tyle samo razy ile w rozkładzie liczby b^2 na czynniki pierwsze, więc w parzystej potędze. To samo można powiedzieć o czynnikach pierwszych liczby $2a + 2b + 1$. No to skończyliśmy dowód.

Ależ skąd! Przecież nie wiemy, czy liczba $a-b$ jest nieujemna! To trzeba wykazać i to korzystając z całkowitości liczb a, b, bo bez trudu można znaleźć liczby **rzeczywiste**, dla których spełniona jest równość $2a^2+a=3b^2+b$ i $a<b$, np. $b=1$, $a=-\frac{1}{4}(1+\sqrt{33})$.

Załóżmy, że $a-b<0$, więc że istnieją takie liczby całkowite k, ℓ, że

$$a-b=-k^2 \quad \text{i} \quad 2a+2b+1=-\ell^2\,. \tag{1}$$

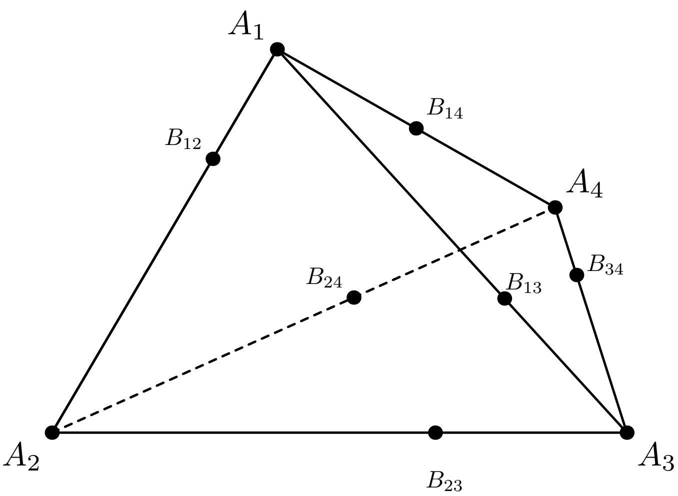
Liczba $3b^2+b=b(3b+1)$ jest parzysta, więc liczba $2a^2+a$ też jest parzysta i wobec tego liczba a jest parzysta. Z równań (1) wynika, że $a=\frac{1}{4}\left(-2k^2-\ell^2-1\right)$. Ponieważ a jest liczbą całkowitą, więc liczba ℓ jest nieparzysta. Istnieje więc taka liczba całkowita n, że $\ell=2n+1$, zatem $a=\frac{-2k^2-4n(n+1)-2}{4}=\frac{-k^2-2n(n+1)-1}{2}$. Wobec tego liczba k jest nieparzysta, więc istnieje takie $m\in\mathbb{Z}$, że $k=2m+1$, zatem $a=\frac{-2(4m^2+4m+1)-4n(n+1)-2}{4}=-2m^2-2m-n(n+1)-1$, więc liczba a jest nieparzysta, wbrew wcześniejszym ustaleniom. Założenie $a-b<0$ doprowadziło do sprzeczności, więc $a-b\geqslant 0$. Teraz to już dowód jest zakończony.

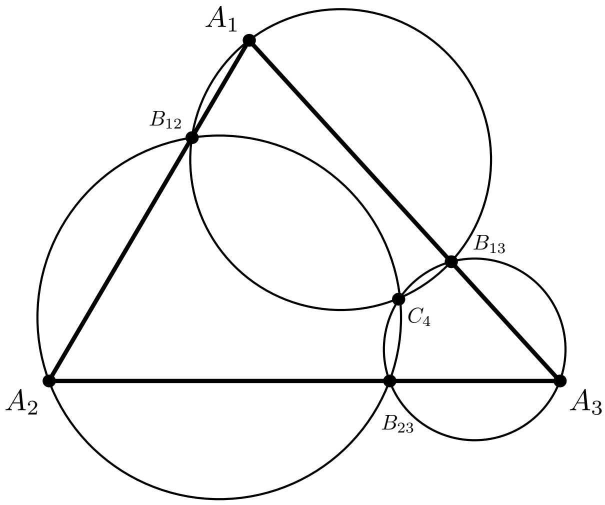
W finale XVI OM uczestniczyło 78 osób. Pracę jednej osoby uznano na bardzo dobrą, prace następnych 10 osób za dobre, istotny wkład w rozwiązanie dostrzeżono w następnych trzech pracach, pozostali albo nie napisali nic, albo nic wartościowego.

Omawiając tego typu zadanie np. na jakimś kółku matematycznym możemy zapytać o rozwiązania tego równania w liczbach całkowitych. To prowadzi do równania Pella, ułamków łańcuchowych itp.

Szóste zadanie z tego finału też okazało się dosyć trudne: rozwiązał je tylko jeden uczestnik (teraz prof. dr hab. TF, zresztą już emeryt). Pozostali albo nie zaczęli rozwiązania, albo nie doszli do niczego istotnego, więc ich prace oceniono na 0 p.
Na krawędziach czworościanu $A_1A_2A_3A_4$ wybrano sześć punktów, po jednym na każdej krawędzi. Przez każdy wierzchołek czworościanu i te trzy punkty z obranych punktów, które leżą na krawędziach z niego wychodzących, poprowadzono sferę. Dowieść, że cztery tak powstałe sfery mają punkt wspólny.
Dodać należy, że na zawodach drugiego stopnia tej OM pojawiło się analogiczne zadanie dla trójkąta na płaszczyźnie:
Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty P, M, N, różne od wierzchołków trójkąta. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach ANP, BPM, CMN mają punkt wspólny.
To zadanie nie jest trudne, jednak w okręgach warszawskim, krakowskim i łódzkim żadnej pracy nie uznano za bardzo dobrą. Rzecz w tym, że rozwiązanie jest proste, ale konieczne jest rozważenie wielu konfiguracji. Okazało się, że zidentyfikowanie wszystkich przypadków to główna trudność zadania, ale to tylko uwaga na marginesie.

Zadanie przestrzenne sprowadza się łatwo do zadania płaskiego. Pominiemy szczególne przypadki. Założymy w szczególności, że żaden z wybranych punktów na krawędziach czworościanu nie jest jego wierzchołkiem oraz że każde dwie rozpatrywane sfery przecinają się wzdłuż pewnego okręgu (nie są styczne). Niech B_{ik} oznacza punkt wybrany na krawędzi A_iA_k ($i,k\in\{1,2,3,4\}$, $i<k$), S_i oznacza sferę przechodzącą przez A_i i punkty B_{ij}, $j\in\{1,2,3,4\}$, $i\neq j$.

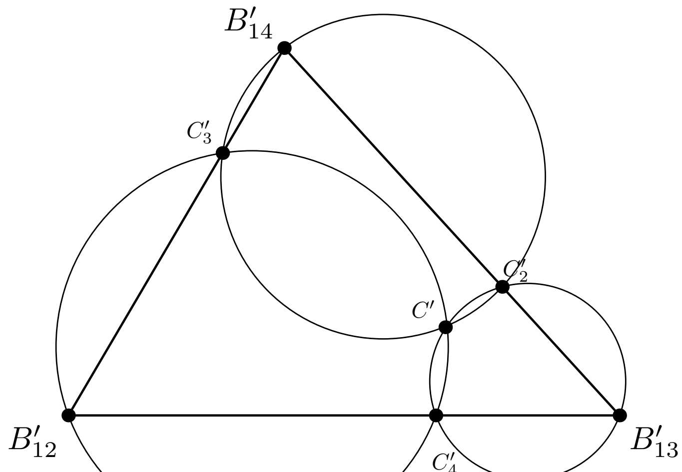




Niech C_i będzie punktem wspólnym płaszczyzny $A_jA_kA_\ell$ ($\{j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}$) i sfer S_j, S_k, S_ℓ – istnienie C_i wynika z twierdzenia dla trójkąta. Teraz rzutujemy stereograficznie sferę S_1 z punktu A_1 na płaszczyznę, która nie zawiera punktu A_1. Obraz punktu X oznaczamy symbolem X'. Obrazami okręgów przechodzących przez A_1 są proste, obrazami innych okręgów – okręgi. Rozważamy trójkąt $B'_{12}B'_{13}B'_{14}$. Na jego bokach leżą odpowiednio punkty C'_4, C'_2, C'_3. Niech C' będzie punktem wspólnym okręgów wyznaczonych przez trójki:

$$B'_{12}, C'_4, C'_3; \qquad B'_{13}, C'_2, C'_4; \qquad B'_{14}, C'_3, C'_2.$$

Punkty B_{12}, C_4, C_3 leżą na sferze S_2, więc punkt C, którego obrazem w rzucie stereograficznym jest C', też leży na sferze S_2, bo okrąg wyznaczony przez punkty B_{12}, C_4, C_3 przekształcany jest na okrąg wyznaczony przez B'_{12}, C'_4, C'_3. Analogicznie C leży na sferach S_3 i S_4. Oczywiście leży też na sferze S_1.



Zakończyliśmy rozwiązanie.

Ciągle nie bardzo wiem, dlaczego nie rozwiązałem tego zadania w 1965 r. I tak już chyba zostanie.