LXIX OM zawody II i III stopnia - zadania geometryczne
II stopień: zadanie 3 rachunkowo i zadanie 4. wg. zawodników
III stopień: zadanie 1 rachunkowo i zadanie 5. trzema sposobami

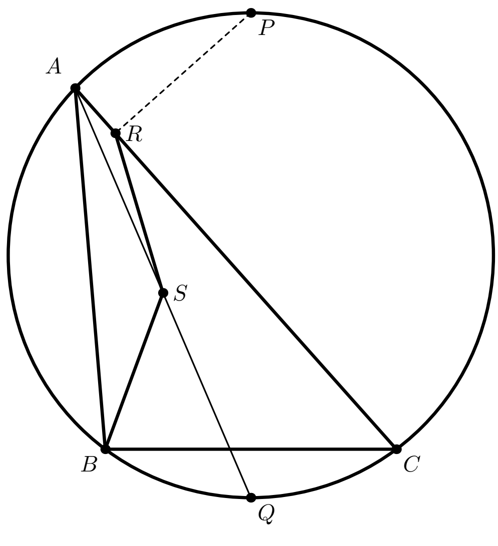
Ostatnie poprawki 14 maja, 2018 r. o godz. 1:37

Zamieszczam tu rozwiązania kilku zadań geometrycznych. Tekst ma stanowić uzupełnienie rozwiązań ze strony Olimpiady matematycznej. Uważam, że warto umieć obliczać różne rzeczy i myślę, że to jedna z metod postępowania, często w konkretnej sytuacji krótsza od syntetycznej. Warto znać różne metody rozwiązywania zadań, bo wtedy, gdy za pomocą jednej z nich nie udaje się rozwiązać problemu, możemy spróbować zastosować inny sposób.

Zadanie 3. Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q, przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC. Punkt S jest środkiem odcinka AQ. Wykazać, że punkty A, B, R i S leżą na jednym okręgu.

Podamy dwa rozwiązania rachunkowe. W obu założymy, że $A \neq P$. Jeśli $A = P$, to również $R = P = A$, S leży w tym przypadku na prostej AQ, a punkt B poza nią. Trzy punkty, które nie leżą na jednej prostej, leżą na jednym okręgu, więc w tym przypadku teza jest prawdą.

Rozwiązanie 1. Z nierówności $A \neq P$ wynika, że $\sphericalangle B = \sphericalangle ABC \neq \sphericalangle ACB = \sphericalangle C$.



Załóżmy, że średnica koła opisanego na trójkącie ABC jest równa 1 oraz $\sphericalangle B > \sphericalangle C$. Mamy wtedy $c = \sin C$, $\sphericalangle ACP = \frac{B-C}{2}$, $\sphericalangle RAP = \frac{B+C}{2}$, $\sphericalangle APR = \frac{A}{2}$, $\sphericalangle CAQ = \frac{A}{2} = \sphericalangle QAB$ (bo prosta PQ jest symetralną odcinka BC, więc Q jest środkiem łuku o końcach B, C). Stąd, z twierdzenia sinusów oraz definicji sinusa i kosinusa wynika, że

$n := AR = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$,

$d := AS = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}$.

Niech $m := RS$. Z twierdzenia kosinusów i znanych wzorów trygonometrycznych wynika, że

$$\begin{aligned}
m^2 &= RS^2 = AR^2 + AS^2 - 2AR\cdot AS\cos\tfrac{A}{2} = \\
&= \sin^2\tfrac{A}{2}\sin^2\tfrac{B-C}{2} + \tfrac{1}{4}\cos^2\tfrac{B-C}{2} - \cos\tfrac{B-C}{2}\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B-C}{2}\cos\tfrac{A}{2} = \\
&= \tfrac{1}{4}\cos^2\tfrac{B-C}{2} - \sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B-C}{2}\left(\cos\tfrac{A}{2}\cos\tfrac{B-C}{2} - \sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B-C}{2}\right) = \\
&= \tfrac{1}{4}\cos^2\tfrac{B-C}{2} - \sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B-C}{2}\cos\tfrac{A+B-C}{2} = \tfrac{1}{4}\cos^2\tfrac{B-C}{2} - \sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B-C}{2}\cos(\tfrac{A+B+C}{2} - C) = \\
&= \tfrac{1}{4}\cos^2\tfrac{B-C}{2} - \sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B-C}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2} - C) = \tfrac{1}{4}\cos^2\tfrac{B-C}{2} - \sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B-C}{2}\sin C
\end{aligned}$$

oraz (chcemy dowieść, że $BS = SR$, bo jeśli teza jest prawdziwa, to tak musi być)

$$\begin{aligned}
BS^2 &= AS^2 + AB^2 - 2AS\cdot AB\cos\tfrac{A}{2} = \tfrac{1}{4}\cos^2\tfrac{B-C}{2} + \sin^2 C - \cos\tfrac{B-C}{2}\sin C\cos\tfrac{A}{2} = \\
&= \tfrac{1}{4}\cos^2\tfrac{B-C}{2} + \sin C\left(\sin C - \cos\tfrac{B-C}{2}\cos\tfrac{A}{2} + \sin\tfrac{B-C}{2}\sin\tfrac{A}{2} - \sin\tfrac{B-C}{2}\sin\tfrac{A}{2}\right) =
\end{aligned}$$

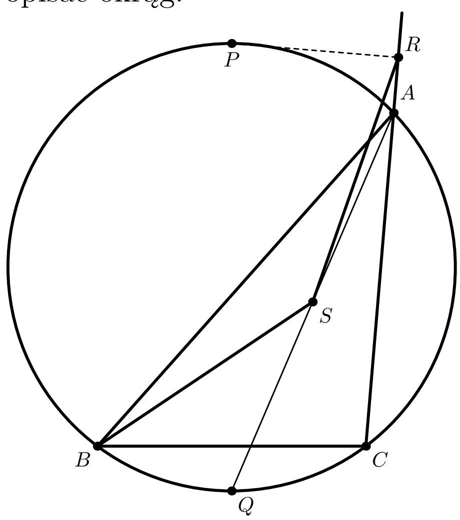
$= \frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2} + \sin C\left(\sin C - \cos\frac{A+B-C}{2} - \sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) =$
$= \frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2} + \sin C\left(\sin C - \cos(\frac{A+B+C}{2} - C) - \sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) =$
$= \frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2} + \sin C\left(\sin C - \cos(\frac{\pi}{2} - C) - \sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) =$
$= \frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2} - \sin C\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} = m^2 = RS^2.$

Obliczamy, korzystając z twierdzenia kosinusów, sumę

$$\cos\sphericalangle SBA + \cos\sphericalangle ARS = \frac{m^2+c^2-d^2}{2mc} + \frac{m^2+n^2-d^2}{2mn} =$$
$$= \frac{nm^2+nc^2-nd^2+cm^2+cn^2-cd^2}{2cmn} = \frac{(n+c)(m^2+nc-d^2)}{2cmn}.$$

Mamy teraz

$m^2+nc-d^2 = \frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2} - \sin C\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin C - \frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2} = 0$, a stąd $\cos\sphericalangle SBA + \cos\sphericalangle ARS = 0$, zatem $\sphericalangle SBA + \sphericalangle ARS = \pi$, więc na czworokącie $ABSR$ można opisać okrąg.



Jeśli $\sphericalangle B < \sphericalangle C$, to sytuacja nieco zmienia się. Liczba n jest wtedy ujemna i długość odcinka AR równa jest liczbie $-n$. Wszystko pozostaje bez zmian z wyjątkiem końcówki. Mamy w tej sytuacji

$$\cos\sphericalangle SBA - \cos\sphericalangle ARS = \frac{m^2+c^2-d^2}{2mc} - \frac{m^2+n^2-d^2}{2m(-n)} =$$
$$= \frac{nm^2+nc^2-nd^2+cm^2+cn^2-cd^2}{2cmn} =$$
$$= \frac{(n+c)(m^2+nc-d^2)}{2cmn}.$$

Po takich samych obliczeniach jak poprzednio stwierdzamy, że $\cos\sphericalangle SBA - \cos\sphericalangle ARS = 0$, co więc $\sphericalangle SBA = \sphericalangle ARS$, a stąd wynika, że punkty A, R, B, S leżą na jednym okręgu, oczywiście korzystamy tu z tego, że punkty B i R znajdują się po jednej stronie prostej AQ.

A teraz prawie to samo za pomocą liczb zespolonych.

Rozwiązanie 2. Punkty są więc liczbami zespolonymi. Zakładamy, że okręgiem opisanym na trójkącie jest okrąg o środku 0 i promieniu 1. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $P = i$, $Q = -i$, $B = -\bar{C}$. Części urojone liczb B i C są równe: $\frac{1}{2i}(B - \bar{B}) = = \frac{1}{2i}\left(-\bar{C} - \overline{(-\bar{C})}\right) = \frac{1}{2i}(-\bar{C} + C)$. Punkty P i A leżą po tej samej stronie prostej BC, co oznacza, że część urojona punktu A jest większa od części urojonej punktu C, bo $\mathrm{im}(P) = 1$, czyli $\frac{1}{2i}(A - \bar{A}) > \frac{1}{2i}(C - \bar{C})$.

Punkty z i $\bar{z}$ są symetryczne względem osi rzeczywistej. Obrazem punktu z w symetrii względem prostej przechodzącej przez 0 oraz $d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest punkt $\overline{z \cdot \frac{|d|}{d}} \cdot \frac{d}{|d|} = \frac{d}{\bar{d}}\bar{z}$ — obracamy wokół punktu 0 tak, by punkt d trafił na $|d|$, potem przekształcamy przez symetrię względem osi rzeczywistej, potem obracamy tak, by punkt $|d|$ wrócił do punktu d. Wobec tego obrazem punktu z w symetrii względem prostej przechodzącej przez punktu A i C jest punkt

$$\frac{A-C}{\overline{A-C}}\cdot\overline{(z-C)}+C=\frac{(A-C)\bar{z}+\bar{A}C-A\bar{C}}{\bar{A}-\bar{C}}\,.$$

Ponieważ $|A|=1=|C|$, więc $A\cdot\bar{A}=1=C\cdot\bar{C}$, tzn. $\bar{A}=\frac{1}{A}$ i $\bar{C}=\frac{1}{C}$. Pozwala to nieco uprościć ostatni wzór, więc obrazem punktu z w symetrii względem prostej AC jest punkt $-AC\bar{z}+A+C$. Wobec tego obrazem $P=i$ jest punkt $ACi+A+C$, zatem $R=\frac{1}{2}(i+ACi+A+C)$. Oczywiście $S=\frac{1}{2}(A+Q)=\frac{1}{2}(A-i)$.

Punkty (różne) W,X,Y,Z leżą na jednym okręgu lub na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz (zwany dwustosunkiem) $\frac{W-Y}{X-Y}:\frac{W-Z}{X-Z}$ jest liczbą rzeczywistą, więc jeśli nie leżą na jednej prostej, to leżą na jednym okręgu. Argumentem liczby $\frac{W-Y}{X-Y}$ jest kąt, mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, między wektorami $\overrightarrow{YX}$ oraz $\overrightarrow{YW}$, a argumentem liczby $\frac{W-Z}{X-Z}$ — kąt wektorami $\overrightarrow{ZX}$ oraz $\overrightarrow{ZW}$. Prawdziwość poprzedniego zdania wynika od razu z twierdzenia mówiącego, że „*na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów są równe*” i z twierdzenia mówiącego, że „*zbiór punktów, z których odcinek widać pod jednym kątem i które leżą po jednej stronie prostej zawierającej odcinek, jest łukiem okręgu*”.

Chcemy więc udowodnić, że iloczynem liczb $\frac{S-R}{A-R}=\frac{A-i-i-ACi-A-C}{2A-i-ACi-A-C}=\frac{ACi+C+2i}{ACi-A+C+i}$ oraz $\frac{A-B}{S-B}=\frac{A+\bar{C}}{S+\bar{C}}=2\frac{A+\bar{C}}{A+2\bar{C}-i}$ jest liczba rzeczywista. Mamy

$$\frac{A-B}{S-B}\cdot\frac{S-R}{A-R}=2\frac{A+\bar{C}}{A+2\bar{C}-i}\cdot\frac{ACi+C+2i}{ACi-A+C+i}=$$

$$=2\frac{|A+\bar{C}|^2}{(A+2\bar{C}-i)(\bar{A}+C)}\cdot\frac{|ACi+C+2i|^2}{(ACi-A+C+i)(-\bar{A}\bar{C}i+\bar{C}-2i)}\,.$$

Wystarczy zająć się iloczynem mianowników, bo liczniki są rzeczywiste i dodatnie. Mamy

$$\begin{aligned}
&(A+2\bar{C}-i)\cdot(\bar{A}+C)\cdot(ACi-A+C+i)\cdot(-\bar{A}\bar{C}i+\bar{C}-2i)=\\
&=(A+2\bar{C}-i)\cdot(\bar{A}+C)\cdot\big(Ai(C+i)+(C+i)\big)\cdot(-\bar{C}i)\cdot(\bar{A}+i+2C)=\\
&=|A+2\bar{C}-i|^2\cdot(\bar{A}+C)\cdot(Ai+1)\cdot(C+i)\cdot(-\bar{C}i)=\\
&=|A+2\bar{C}-i|^2\cdot(\bar{A}+C)\cdot(Ai+1)\cdot(\bar{C}-i)=\\
&=|A+2\bar{C}-i|^2\cdot(\bar{A}+C)\cdot\big(A+\bar{C}+i(A\bar{C}-1)\big)=\\
&=|A+2\bar{C}-i|^2\cdot\big(|A+\bar{C}|^2+i(\bar{C}+A-\bar{A}-C)\big)=.
\end{aligned}$$

Liczba $i(\bar{C}+A-\bar{A}-C)$ jest rzeczywista, bo różnica liczby i jej sprzężenia jest czysto urojona.

A teraz kilka uczniowskich rozwiązań zadania czwartego z II stopnia LXIX OM (z okręgu warszawskiego).

Zadanie 4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, przy czym okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD. Udowodnić, że okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC.

Rozwiązanie analityczne. Możemy przyjąć, że wierzchołkami trapezu są punkty $A=(0,0)$, $B=(2b,0)$, $C=(2c,2)$ i $D=(2d,2)$ Wtedy środkami ramion trapezu, więc odcinków BC i AD są punkty $M=(b+c,1)$ i $N=(d,1)$. Prosta AD ma równanie $x-dy=0$, a prosta BC ma równanie $x+(b-c)y-2b=0$. Okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu M od prostej AD jest równa połowie długości odcinka BC czyli długości odcinka BM. Zachodzi więc równość

4.1 $$\frac{|c-d-b|}{\sqrt{1+d^2}}=\frac{|b+c-d-2b|}{\sqrt{1+d^2}}=\sqrt{(2b-(b+c))^2+1^2}=\sqrt{(b-c)^2+1}\,.$$

Okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu N od prostej BC jest równa połowie długości odcinka AD czyli długości odcinka AN. Oznacza to, że spełniona jest równość

4.2 $$\frac{|d+b-c|}{\sqrt{1^2+(b-c)^2}}=\sqrt{d^2+1}\,.$$

Warunek 4.2 jest w oczywisty sposób równoważny warunkowi 4.1. Dowód został zakończony.

Ten dowód opowiedział uczeń komentując z grubsza tak: *w tablicach są wzory na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty i na odległość punktu od prostej, podstawiłem i wyszło.*

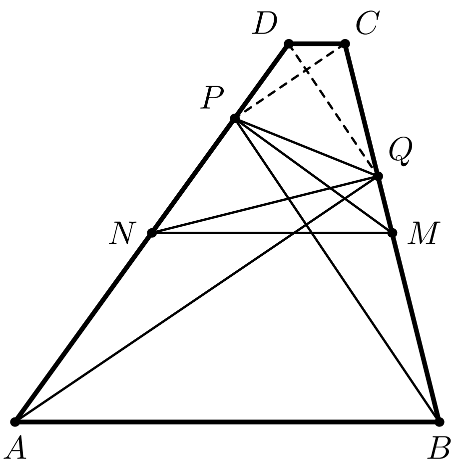
Przejdę do rozwiązań geometrycznych, których było wiele. Różniły się nieznacznie. Częstym błędem lub luką w zależności od redakcji było założenie, że proste AD i BC mają punkt wspólny, co wykluczało równoległoboki. Nieliczni rozpatrywali ten przypadek właściwie pisząc, że wtedy odległość punktu M od prostej AD jest odległością prostych AD i BC, więc jest równa odległości punktu N od prostej BC, co kończy dowód w tym wypadku. W dalszym ciągu zakładam, że trapez nie jest równoległobokiem i że $AB>CD$. Przez X oznaczam punkt wspólny prostych AD i BC.

Zacznę od rozwiązania, które mnie zaskoczyło. Trochę zmieniam redakcję i poprawiam.

Rozwiązanie z inwersją. Trójkąty XDC i XAB są podobne, bo $AB\parallel DC$. Wobec tego mamy $\frac{XD}{XC}=\frac{XA}{XB}$, czyli $XD\cdot XB=XC\cdot XA$. Niech $r=\sqrt{XD\cdot XB}=\sqrt{XC\cdot XA}$. Niech F będzie złożeniem inwersji względem okręgu o środku X i promieniu r z symetrią względem dwusiecznej kąta AXB. Mamy $F(A)=D$, czyli punkt D jest obrazem punktu A w przekształceniu F, więc $F(D)=A$ oraz $F(A)=C$, więc $F(C)=A$. Obrazem okręgu ω_1 o średnicy BC w inwersji względem okręgu o środku X jest okrąg o średnicy leżącej na prostej BC, bo środek inwersji leży na niej. Wobec tego obrazem okręgu o średnicy BC w przekształceniu F jest okrąg ω_2, którego średnicą jest odcinek AD. Ponieważ ω_1 ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą AD, której obrazem w przekształceniu F jest prosta BC, więc prosta BC (obraz prostej AD) ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem ω_2, więc jest prosta BC jest styczna do okręgu ω_2. Zakończyliśmy drugi dowód.

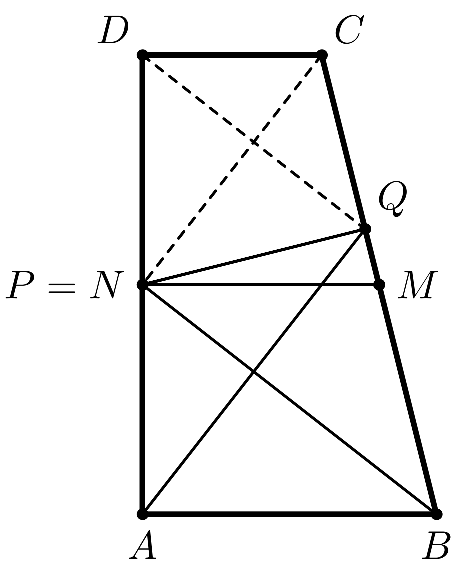
A teraz trzecie rozumowanie, okazało się najpopularniejsze. Spora część uczestników zawodów nie przejmowała się tym, że rysunek mógł być różny od tego, który się im narysował. Nikt nie zwrócił uwagi na to, że może zdarzyć się, że odcinek MN może być prostopadły do jednego z ramion trapezu.

Rozwiązanie z podobieństwami. Niech P oznacza rzut prostokątny punktu M na prostą AD, a Q — rzut prostokątny punktu N na prostą BC. Odcinek MN jest równoległy do podstaw trapezu – wynika to łatwo z twierdzenia Talesa (a nie: talesa, jak piszą niektórzy). Ponieważ $\sphericalangle NQM = 90° = \sphericalangle NPM$, więc punkty M, N, P, Q leżą na jednym okręgu, niezależnie od tego, czy punkty P, Q leżą po jednej stronie prostej MN, czy po różnych.

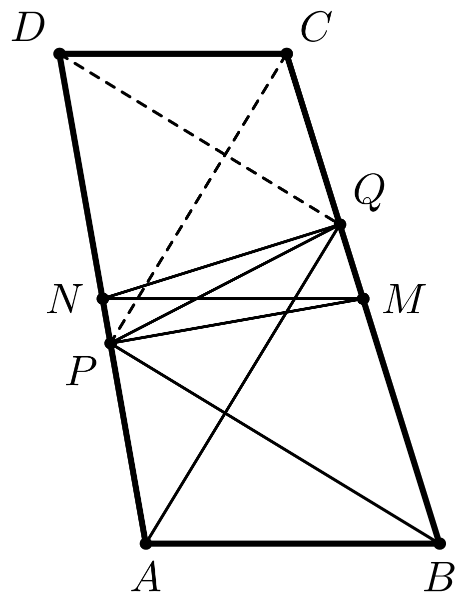


Załóżmy, że punkty M, N znajdują się po jednej stronie prostej MN. Punkty $A, B.P, Q$ leżą na jednym okręgu, bo z tego, że $MN \parallel BA$ wynika, że $180° = \sphericalangle NPQ + \sphericalangle NMQ = \sphericalangle NPQ + \sphericalangle ABQ$. Niech $\beta = \sphericalangle PBM$. Ponieważ $MP = MB$, więc $\sphericalangle BPM = \beta = \sphericalangle PBM = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle PAQ$ – kąty wpisane oparte na jednym łuku są równe. Kąt zewnętrzny trójkąta jest sumą dwóch wewnętrznych do niego nieprzyległych, zatem $2\beta = \sphericalangle PMQ = \sphericalangle PNQ = \sphericalangle NAQ + \sphericalangle NQA = \beta + \sphericalangle NQA$, więc $\beta = \sphericalangle NQA$

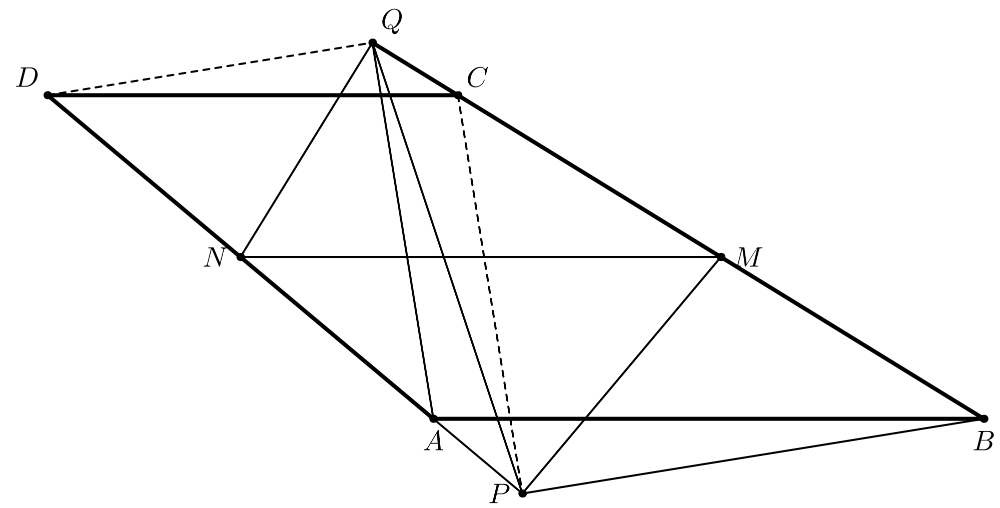
Udowodniliśmy, że trójkąt AQN jest równoramienny, dokładniej, że $AN = NQ$, więc okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC w punkcie Q.



Załóżmy teraz, że $P = N$.Teraz $MN = MP \perp AD$, więc $\sphericalangle NAB = 90° = \sphericalangle NQB$, zatem punkty A, B, P, Q leżą na jednym okręgu. Tak jak poprzednio stwierdzamy, że $\sphericalangle NQA = \sphericalangle ABP = \sphericalangle MPB = \sphericalangle PBM = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle PAQ$, a to oznacza, że trójkąt AQP jest równoramienny: $AN = NQ$, a to oznacza, że o średnicy AD jest styczny do prostej BC w punkcie Q.



Tym razem punkty P, Q leżą po różnych stronach prostej MN. Ponieważ punkty N, P, M, Q leżą na jednym okręgu, więc $180° = \sphericalangle NQM + \sphericalangle NPM = \sphericalangle NQM + \sphericalangle NAB$, zatem na czworokącie $ABQP$ można opisać okrąg. Znów $PM = MB$, więc $\sphericalangle BPM = \beta = \sphericalangle MBP = \sphericalangle QBP = \sphericalangle QAP = \sphericalangle QAN$. Jednocześnie $\sphericalangle ABQ = 180° - \sphericalangle APQ = \sphericalangle NPQ = \sphericalangle PAQ + \sphericalangle PQA = \beta + \sphericalangle PQA$ oraz $2\beta = \sphericalangle PBM + \sphericalangle BPM = \sphericalangle PMQ = 180° - \sphericalangle PNQ = \sphericalangle DNQ = \sphericalangle NAQ + \sphericalangle NQA = \beta + \sphericalangle NQA$, więc $\beta = \sphericalangle NQA$, zatem $\sphericalangle NAQ = \sphericalangle NQA$, a stąd $AN = NQ$, co kończy dowód w tym wypadku.



Podobnie jak poprzednio stwierdzamy, że $\sphericalangle BPM = \sphericalangle PBM = \beta$, zatem $2\beta = \sphericalangle PMQ = 180° - \sphericalangle QNP = \sphericalangle DNQ = \sphericalangle NAQ + \sphericalangle NQA$. Na czworokącie o wierzchołkach A, P, B, Q można opisać okrąg, bowiem $\sphericalangle BAP = \sphericalangle MNP = \sphericalangle PQB$ i punkty A, Q znajdują się po jednej stronie prostej BP. Wobec tego $\sphericalangle NAQ = 180° - \sphericalangle QAP = \sphericalangle PBQ = \beta$. Tak jak poprzednio otrzymujemy równość $2\beta = \sphericalangle NAQ = \beta + \sphericalangle NQA$, więc $\sphericalangle NQA = \beta$, co pociąga za sobą równość $\sphericalangle NAQ = \sphericalangle NQA$, więc też związek $NQ = NA$, a to kończy dowód w tym przypadku.

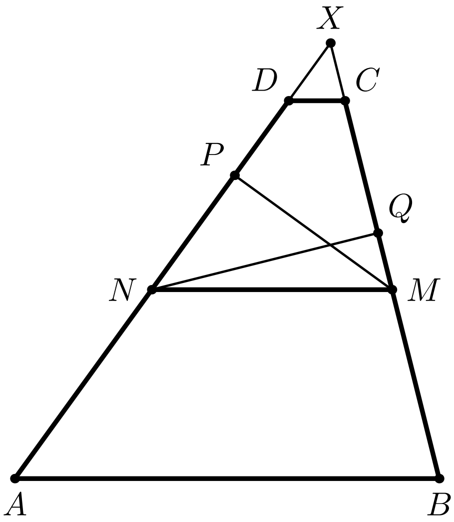
Zagadka: *czy omówiliśmy wszystkie przypadki?*

Komentarz 1. *Można łatwo wykazać, że $PC \parallel AQ$ i $DQ \parallel BP$ i wykorzystywać tę zależność w rozwiązaniu.*

Komentarz 2. *Zapewne Czytelnik zorientował się, że ta metoda choć jest poprawna i stosowało ją najwięcej osób, to jednak nie jest ona najlepsza. Ot wymuszone rozwiązanie, znacznie dłuższe od firmowego z polami czy analitycznego. W dodatku osoby rozwiązujące w ten sposób ryzykują utratę punktu za nierozpatrzenie wszystkich konfiguracji, a jednak są drobne różnice w uzasadnieniu, co niektórzy przeoczyli lub uznali, że to drobiazg nie wart nawet omówienia.*

W kilku pracach użyto potęgę punktu względem okręgu.

Rozwiązanie z potęgą punktu.



Trójkąt ABX jest podobny do trójkąta NMX, a ten do trójkąta DCX, bo odpowiednie kąty w tych trójkątach są równe, gdyż $AB \parallel NM \parallel DC$. Trójkąt prostokątny MXP jest podobny do trójkąta prostokątnego NXQ, bo mają wspólny kąt ostry. Wynikają stąd równości $\frac{XQ}{XN} = \frac{XP}{XM}$ oraz $\frac{XA}{XB} = \frac{XN}{XM} = \frac{XD}{XC}$. Ponieważ punkty B, C, P leżą na jednym okręgu, który jest styczny do prostej AD w punkcie P, więc $XP^2 = XC \cdot XB$. Wynika z tych równości, że $XA = \frac{XN}{XM} \cdot XB$, $XD = \frac{XN}{XM} \cdot XC$ i $XQ = \frac{XN}{XM} \cdot XP$. Wobec tego zachodzą równości $XD \cdot XA = \frac{XN}{XM} \cdot XC \cdot \frac{XN}{XM} \cdot XN = \left(\frac{XN}{XM} \cdot XP\right)^2 = XQ^2$. Z nich i ze znanego twierdzenia o potędze punktu względem okręgu wynika, że punkty A, D, Q leżą na jednym okręgu. Ponieważ $DN = NA$, więc

$$XN^2 - NQ^2 = XQ^2 = XD \cdot XA = (XN - ND)(XN + ND) = XN^2 - ND^2\,,$$

zatem $ND = NQ$. Wobec tego okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC w punkcie Q, a to mieliśmy udowodnić.

Uwaga. To rozumowanie nie wymaga rozpatrywania innych przypadków, wystarczy założenie $AB > DC$ gwarantujące istnienie punktu X, nigdzie nie korzystaliśmy z tego punkty P, Q leżą na jakimś konkretnym odcinku.

III stopień:

zadanie 1. rachunkowo a potem

zadanie 5. trygonometrycznie, analitycznie i za pomocą liczb zespolonych

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnić, ze prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD.

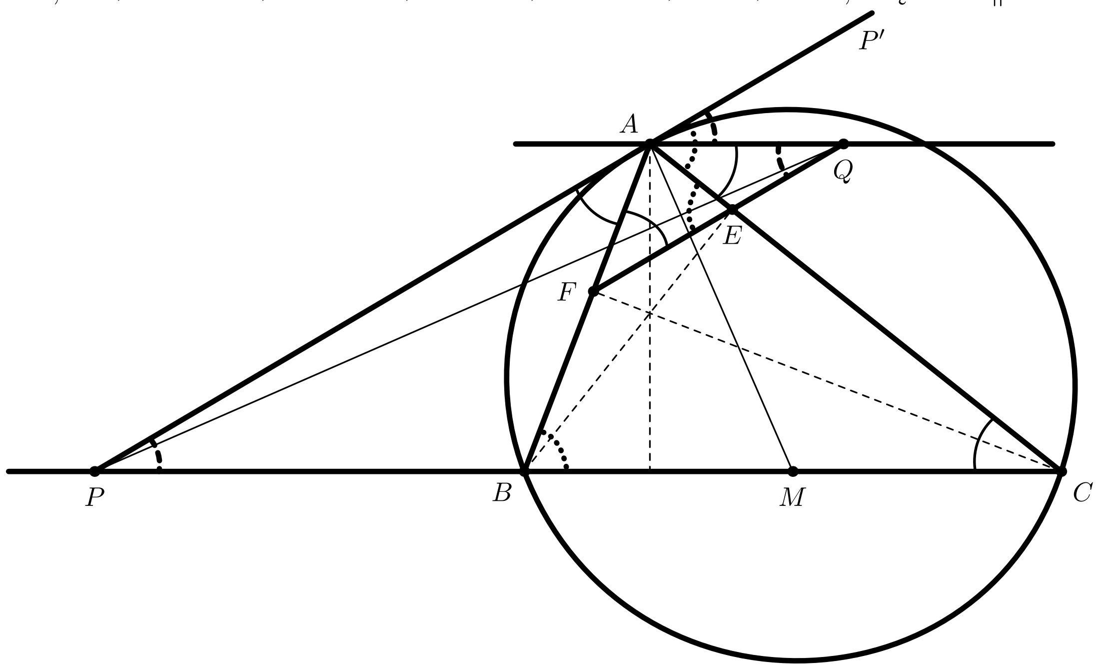
Rozwiązanie. Przedstawię rozwiązanie analityczne, bo jest ono krótkie i nie wymaga żadnych pomysłów. Jedynie właściwy wybór układu współrzędnych i parametrów może być pewnym problemem, choć zdaniem piszącego te słowa jest on wymuszony warunkami nałożonymi przez autora zadania.

Przyjmijmy, że $A = (0, 0)$, $B = (2b, y_B)$ oraz $C = (2c, y_C)$ oraz że punkt D leży na pierwszej osi układów współrzędnych, czyli że półprosta AD jest dwusieczną kąta CAB oraz że $b, c > 0$. Z założeń wynika, że kąt CAB jest ostry, tym bardziej kąt CAD. Niech $k = \operatorname{tg} \sphericalangle CAD$. Wtedy prosta AC jest opisana równaniem $y = kx$, a prosta AB równaniem $y = -kx$. Wobec tego zachodzą równości $y_C = 2kc$ i $y_B = -2kb$. Z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że zachodzi równość $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{2c\sqrt{1+k^2}}{2b\sqrt{1+k^2}} = \frac{c}{b}$. Stąd wynika, że $D = \frac{1}{b+c}(cB + bC) = \left(\frac{4bc}{b+c}, 0\right)$. Wobec tego równanie symetralnej odcinka AD ma postać $x = \frac{2bc}{b+c}$. Z wzoru $M = (b+c, k(c-b))$ wynika, że równanie symetralnej odcinka AM ma postać $(b+c)x + k(c-b)y = \frac{1}{2}((b+c)^2 + k^2(b-c)^2)$. Wobec tego jeśli $O_2 = (x_2, y_2)$, to $x_2 = \frac{2bc}{b+c}$ i $2bc + k(c-b)y_2 = \frac{1}{2}((b+c)^2 + k^2(b-c)^2)$, więc $y_2 = \frac{(b-c)^2+k^2(b-c)^2)}{2k(c-b)} = \frac{(c-b)(1+k^2)}{2k}$.

Równanie symetralnej odcinka AB wygląda tak: $x - ky = b(1+k^2)$, a symetralnej odcinka AC tak: $x + ky = c(1+k^2)$. Wobec tego jeśli $O_1 = (x_1, y_1)$, to $y_1 = \frac{(c-b)(1+k^2)}{2k} = y_2$. Równość $y_1 = y_2$ oznacza, że prosta O_2O_1 jest równoległa do osi OX, więc do dwusiecznej kąta CAB. Zakończyliśmy dowód.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P. Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q. Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A.

Rozwiązanie. Zastosujemy najpierw geometrię analityczną, ale nie od samego początku. Niech A, B, C oznaczają kąty w trójkącie ABC o wierzchołkach A, B, C. Ponieważ $AE = AB\cos A$ i $AF = AC\cos A$, więc trójkąt ABC jest podobny do trójkąta AEF – cecha *bkb* i $\frac{AE}{AB}\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \cos A$. Stąd w szczególności wynika, że $\sphericalangle FEA = \sphericalangle B$ i $\sphericalangle EFA = \sphericalangle C$. Niech P' oznacza taki punkt półprostej $PA^{\rightarrow}$, że punkt A leży między punktami P i P'. Ze znanego twierdzenia (kąt między styczną a cięciwą jest równy wpisanemu opartemu na tej cięciwie) wynika, że $\sphericalangle P'AE = \sphericalangle P'AC = \sphericalangle B$ oraz $\sphericalangle PAB = \sphericalangle C = \sphericalangle AFE$, więc $EF \parallel PA$.



Bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $A = (0,1)$, $B = (b,0)$, $C = (c,0)$, $a > 0$ i $b < 0 < c$, ostatnia nierówność może być spełniona, bo kąty B i C są ostre, pozostałe to kwestia dobrania układu współrzędnych do zadania. Prosta AB może być opisana równaniem $x + by = b$, prosta AC – równaniem $x + cy = c$, prosta prostopadła do AB przechodząca przez C – równaniem $bx - y = bc$, wreszcie prosta prostopadła do AC przechodząca przez B – równaniem $cx - y = bc$. Niech $E = (x_E, y_E)$ i $F = (x_F, y_F)$. Zachodzą wtedy równości

$$\begin{cases} x_E + cy_E = c \\ cx_E - y_E = bc \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x_F + by_F = b \\ bx_F - y_F = bc \end{cases}$$

Otrzymujemy $E = \left(\frac{c(1+bc)}{1+c^2}, \frac{c(c-b)}{1+c^2}\right) = \frac{c}{1+c^2}\big(1 + bc, c - b\big)$ oraz
$F = \left(\frac{b(1+bc)}{1+b^2}, \frac{b(b-c)}{1+b^2}\right) = \frac{b}{1+b^2}\big(1 + bc, b - c\big)$.
Zauważmy, że $\frac{c}{1+c^2} - \frac{b}{1+b^2} = \frac{(c-b)(1-bc)}{(1+c^2)(1+b^2)}$ oraz $\frac{c}{1+c^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{(c+b)(1+bc)}{(1+c^2)(1+b^2)}$. Wobec tego $\overrightarrow{FE} = \frac{(c-b)(1+bc)}{(1+c^2)(1+b^2)}[1 - bc, b + c]$, a to oznacza, że wektor $[1 - bc, b + c]$ jest równoległy do prostej EF, więc również do prostej PA. Możemy zatem napisać równania prostych
EF: $(b+c)x + (bc-1)y = \frac{c}{1+c^2}\big((b+c)(1+bc) + (c-b)(bc-1)\big) = \frac{c}{1+c^2} \cdot 2b(1+c^2) = 2bc$ oraz
PA: $(b + c)x + (bc - 1)y = (bc - 1)$.
Podstawiając $y = 0$ w równaniu prostej PA otrzymujemy $x = \frac{bc-1}{b+c}$, a w równaniu prostej EF przyjmujemy $y = 1$ i wtedy $x = \frac{bc+1}{b+c}$. Wobec tego $P = \left(\frac{bc-1}{b+c}, 0\right)$ i $Q = \left(\frac{bc+1}{b+c}, 1\right)$, zatem $\overrightarrow{PQ} = \left[\frac{2}{b+c}, 1\right]$. Mamy też $\overrightarrow{AM} = \left[\frac{b+c}{2}, -1\right]$. Ponieważ $\frac{2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{2} - 1 = 0$, więc wektory $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{AM}$ są prostopadłe. $\square$

Przedstawimy rozwiązanie trygonometryczne. Niech M oznacza środek odcinka BC. Z tego, że $AB < AC$ wynika, że kąty QPC i AMB są ostre. Wykażemy, że

$$\sin^2 \sphericalangle QPC + \sin^2 \sphericalangle AMB = 1\,,$$

a z tego teza wynika natychmiast. Użyjemy twierdzenia sinusów, twierdzenia kosinusów i znanych (kiedyś) wzorów trygonometrycznych:

(1) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$,

(2) $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ i $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$,

(3) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ i $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

Niech A, B, C oznaczają kąty w trójkącie ABC o wierzchołkach A, B, C. Bez straty ogólności można założyć, że średnica okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równa 1. Z twierdzenia sinusów wynika, że wtedy $BC = \sin A$, $CA = \sin B$ i $AB = \sin C$, więc $AE = \sin C \cdot \cos A$ i $AF = \sin B \cdot \cos A$. Trójkąt AFE jest więc podobny do trójkąta ABC w skali $\cos A$, zatem $\sphericalangle FEA = \sphericalangle B$ i $\sphericalangle EFA = \sphericalangle C$. Niech P' oznacza taki punkt półprostej $PA^{\rightarrow}$, że punkt A leży między punktami P i P'. Ze znanego twierdzenia (kąt między styczną a cięciwą jest równy wpisanemu opartemu na tej cięciwie) wynika, że $\sphericalangle P'AE = \sphericalangle P'AC = \sphericalangle B$ oraz $\sphericalangle PAB = \sphericalangle C = \sphericalangle AFE$, więc prosta FE jest równoległa do prostej PA. Prosta AQ jest równoległa do prostej BC, więc $\sphericalangle QAC = \sphericalangle C$ i $\sphericalangle APC = \sphericalangle P'AQ = \sphericalangle APB$. Wobec tego $\sphericalangle QAE = \sphericalangle C$ oraz $\sphericalangle APC = \sphericalangle P'AQ = \sphericalangle B - \sphericalangle C = \sphericalangle EQA$.

Niech h będzie wysokością trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A. Mamy $h = \sin B \sin C$. Z twierdzenia sinusów (trójkąt AQE) otrzymujemy

$$AQ = \frac{AE}{\sin(B-C)} \cdot \sin(\pi - B) = \frac{\sin B \sin C \cos A}{\sin(B-C)} = \frac{h \cos A}{\sin(B-C)}\,,$$

Z twierdzenia sinusów (trójkąt APC) i równości $\sphericalangle APC = B - C$ wynika też, że

$$AP = \frac{AC}{\sin(B-C)} \sin \sphericalangle ACP = \frac{\sin B \sin C}{\sin(B-C)} = \frac{h}{\sin(B-C)}\,.$$

Niech $m = AM$. Z twierdzenia kosinusów (trójkąty PAQ i ACM) oraz z (1), (2), (3), równości $A + B + C = \pi$ i $1 = \cos^2 A + \sin^2 A$ otrzymujemy:

$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos(\pi - (B-C)) = \frac{h^2}{\sin^2(B-C)}\left(\cos^2 A + 1 + 2\cos A \cos(B-C)\right) =$
$= \frac{h^2}{\sin^2(B-C)}\Big(\sin^2 A + 2\cos A\big(\cos A + \cos(B-C)\big)\Big) =$
$= \frac{h^2}{\sin^2(B-C)}\Big(\sin^2 A + 4\cos A \cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}\Big) = \frac{h^2}{\sin^2(B-C)}\Big(\sin^2 A + 4\cos A \sin B \sin C\Big)$

oraz

$m^2 = \sin^2 B + \frac{1}{4}\sin^2 A - \sin B \sin A \cos C = \frac{1}{4}\sin^2 A + \sin B(\sin B - \sin A \cos C) =$
$= \frac{1}{4}\sin^2 A + \sin B(\sin(A+C) - \sin A \cos C) = \frac{1}{4}\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A.$

Wobec tego $PQ^2 = \frac{4m^2h^2}{\sin^2(B-C)}$. Wynika stąd, z różnych wzorów, m.in $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$, że

$$\sin^2 \sphericalangle QPC + \sin^2 \sphericalangle AMB = \frac{h^2}{4m^2h^2/\sin^2(B-C)} + \frac{h^2}{m^2} = \frac{\sin^2(B-C) + 4h^2}{4m^2} =$$

$$= \frac{\sin^2(B-C) + 4\sin^2 B \sin^2 C}{4m^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2(B-C) - \sin^2 A + 4\sin^2 B \sin^2 C}{4m^2} =$$

$$= \frac{\sin^2 A + (\sin(B-C) - \sin A)(\sin(B-C) + \sin A) + 4\sin^2 B \sin^2 C}{4m^2} =$$

$$= \frac{1}{4m^2}\Big(\sin^2 A + 2\sin\frac{B-C-A}{2}\cos\frac{B-C+A}{2} \cdot 2\sin\frac{B-C+A}{2}\cos\frac{B-C-A}{2} +$$

$$+ 4\sin^2 B \sin^2 C\Big) = \frac{1}{4m^2}\Big(\sin^2 A + 4(-\cos B)\sin C \cos C \sin B + 4\sin^2 B \sin^2 C\Big) =$$

$$= \frac{1}{4m^2}\Big(\sin^2 A + 4\sin B \sin C(-\cos B \cos C + \sin B \sin C)\Big) =$$

$$= \frac{1}{4m^2}\Big(\sin^2 A - 4\sin B \sin C \cos(B+C)\Big) = \frac{1}{4m^2}\Big(\sin^2 A + 4\sin B \sin C \cos A\Big) = 1.$$

Zakończyliśmy dowód. (Jednemu z uczestników finału OM podobne rozwiązanie zmieściło się już na 7 stronach rękopisu.) □

Na koniec rozwiązanie wg. dwóch finalistów, których nazwisk nie podaję, bo niestety w ich pracach są błędy, co prawda łatwo usuwalne, ale trzeba sporo napracować się „fizycznie" zanim się je usunie, a bez poprawienia nie można ich prac ocenić wysoko ... Rozwiązanie zamieszczam, bo jest znacznie krótsze od trygonometrycznego. Używa liczb zespolonych w rozsądny sposób. I przede wszystkim podoba mi się.

A, B, C – wierzchołki trójkąta. Traktujemy je jako liczby zespolone o module 1 (promień koła opisanego na trójkącie ABC jest równy 1).

(R) Zacznijmy od stwierdzenia, że trzy różne punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\frac{Y-X}{Z-X}$ jest liczbą rzeczywistą, więc gdy $\frac{Y-X}{Z-X} = \frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\overline{Z}-\overline{X}}$, bo jest on rzeczywisty wtedy i tylko wtedy, gdy kąt między wektorami $\overrightarrow{XY}$ i $\overrightarrow{XZ}$ jest równy $0°$ lub $180°$. Warunek można zapisać też tak $\frac{Y-X}{\overline{Y}-\overline{X}} = \frac{Z-X}{\overline{Z}-\overline{X}}$.

(I) Drugie ważne stwierdzenie to: proste wyznaczone przez punkty X, Y oraz X, Z są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\frac{Y-X}{Z-X}$ jest liczbą czysto urojoną, więc iloczynem liczby rzeczywistej przez i, a to ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{Y-X}{Z-X} = -\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\overline{Z}-\overline{X}}$, co można zapisać też tak $\frac{Y-X}{\overline{Y}-\overline{X}} = -\frac{Z-X}{\overline{Z}-\overline{X}}$.

(S) Jeśli $|X| = 1$, to $X^{-1} = \frac{1}{X} = \overline{X}$.

Wszystkie te stwierdzenia wynikają łatwo z tego, że argument iloczynu liczb zespolonych jest sumą argumentów czynników, a wartość bezwzględna iloczynu jest iloczynem wartości bezwzględnych czynników.

Zaczniemy od znalezienia punktu E. Leży on na prostej AC, więc
$\frac{E-C}{\overline{E}-\overline{C}} = \frac{A-C}{\overline{A}-\overline{C}} = \frac{A-C}{1/A-1/C} = -AC$, zatem $E + AC\overline{E} = A + C$.
Prosta BE jest prostopadła do prostej AC, zatem
$\frac{E-B}{\overline{E}-\overline{B}} = -\frac{A-C}{\overline{A}-\overline{C}} = AC$, czyli $E - AC\overline{E} = B - AC\overline{B}$.
Z otrzymanych równań wynika, że $2E = A + B + C - AC\overline{B}$, czyli $E = \frac{1}{2}\left(A + B + C - \frac{AC}{B}\right)$.
Zamieniając B z C w tych wzorach otrzymujemy $F = \frac{1}{2}\left(A + B + C - \frac{AB}{C}\right)$.

Stąd wynikają wzory

$$\textbf{(EF)}\quad E - F = \frac{1}{2}(AB\overline{C} - A\overline{B}C) = \frac{A(B^2-C^2)}{2BC}, \quad \overline{E} - \overline{F} = \frac{1}{2}(\overline{AB}C - \overline{A}B\overline{C}) = \frac{C^2-B^2}{2ABC}.$$

Proste AQ i BC są równoległe, zatem (z warunku (R)) $\frac{Q-A}{\overline{Q}-\overline{A}} = \frac{C-B}{\overline{C}-\overline{B}} = -BC$, więc
$Q + BC\overline{Q} = A + \overline{A}BC$.
Punkty Q, E, F są współliniowe, więc $\frac{Q-E}{\overline{Q}-\overline{E}} = \frac{E-F}{\overline{E}-\overline{F}} = -A^2$, zatem
$Q + \overline{Q}\cdot A^2 = E + \overline{E}\cdot A^2 = \frac{1}{2}\left(A + B + C - \frac{AC}{B}\right) + \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{B}{AC}\right) =$
$= \frac{AB+B^2+BC-AC}{2B} + \frac{A(BC+AC+AB-B^2)}{2BC} = \frac{2ABC+B^2C+BC^2-AC^2+A^2C+A^2B-AB^2}{2BC}$. Mnożąc ostatnią równość przez BC i odejmując ją równości $Q + BC\overline{Q} = A + \overline{A}BC$ pomnożonej przez A^2 otrzymujemy $Q(A^2 - BC) = \frac{1}{2}(2A^3 - A^2(B+C) + A(B^2+C^2) - BC(B+C))$ czyli

$$\textbf{(Q)}\qquad Q = \frac{2A^3 - A^2(B+C) + A(B^2+C^2) - BC(B+C)}{2(A^2-BC)}.$$

Niech D będzie punktem okręgu jednostkowego różnym od A, B, C. Niech R będzie punktem wspólnym prostych AD i BC. Wtedy z własności (R) wynikają równości $\frac{R-A}{\overline{R}-\overline{A}} = \frac{D-A}{\overline{D}-\overline{A}} = -AD$ oraz $\frac{R-B}{\overline{R}-\overline{B}} = \frac{B-C}{\overline{B}-\overline{C}} = -BC$, a z nich równania $R + \overline{R}AD = A + D$ oraz $R + \overline{R}BC = B + C$. Odejmując pierwszą pomnożoną przez BC od drugiej pomnożonej przez AD otrzymujemy

$$R(AD - BC) = AD(B+C) - BC(A+D) \quad \text{czyli} \quad R = \frac{AD(B+C) - BC(A+D)}{AD - BC}.$$

Jasne jest, że $P = \lim\limits_{D\to A} R = \lim\limits_{D\to A} \frac{AD(B+C)-BC(A+D)}{AD-BC} = \frac{A^2(B+C)-2ABC}{A^2-BC}$.

Należy wykazać, że proste PQ i AM, gdzie $M = \frac{B+C}{2}$, są prostopadłe, więc że

$$(\perp) \qquad \frac{Q-P}{\overline{Q}-\overline{P}} = -\frac{A-M}{\overline{A}-\overline{M}} = -\frac{2A-B-C}{2\overline{A}-\overline{B}-\overline{C}} = -\frac{ABC(2A-B-C)}{2BC-AC-AB}\,.$$

Mamy teraz

$Q-P = \frac{2A^3-A^2(B+C)+A(B^2+C^2)-BC(B+C)}{2(A^2-BC)} - \frac{2ABC-A^2(B+C)}{BC-A^2} =$

$= \frac{2A^3-3A^2(B+C)+A(B^2+4BC+C^2)-BC(B+C)}{2(A^2-BC)} = \frac{(2A-B-C)(A^2-A(B+C)+BC)}{2(A^2-BC)} = \frac{(2A-B-C)(A-B)(A-C)}{2(A^2-BC)}$.

Wobec tego $\overline{Q}-\overline{P} = \frac{(\frac{2}{A}-\frac{1}{B}-\frac{1}{C})(\frac{1}{A}-\frac{1}{B})(\frac{1}{A}-\frac{1}{C})}{2(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{BC})} = \frac{(2BC-AC-AB)(B-A)(C-A)}{2ABC(BC-A^2)}$. Stąd

$$\frac{Q-P}{\overline{Q}-\overline{P}} = -\frac{ABC(2A-B-C)}{2BC-AC-AB}\,,$$

a tę równość należało udowodnić.

Dodać wypada, że rozkład wyrażenia $Q-P$ na czynniki jest niejako wymuszony przez równość, którą chcieliśmy udowodnić i twierdzenie mówiące, że rozkład wielomianu o współczynnikach rzeczywistych na czynniki nierokładalne jest jednoznaczny: skoro w licznik po skróceniu ma pojawić się czynnik $2A-B-C$, to wielomian musi być przez ten czynnik podzielny, więc autor tych słów po prostu podzielił wiedząc, że jeśli tylko nie pomylił się w obliczeniach, to mu się uda. Bez tego dzielenia też można równość $(\perp)$ wykazać, ale trzeba nieco więcej napisać – żmudne, ale łatwe.

Przejścia granicznego przy znajdowaniu punktu przecięcia stycznej z prostą BC można uniknąć np. przyjmując, że $A=1$ (wtedy styczna składa się z punktów z, dla których $z+\overline{z}=2$ lub $A=i$ (wtedy styczna składa się z punktów z, dla których $z-\overline{z}=2i$). Niektórzy finaliści tak zakładali.

W tekście mogą być jakieś błędy, literówki, więc jeśli ktoś zauważy, proszę o wiadomość.