Opowiadanie o zadaniu 2. z drugiego stopnia LXX OM z myślą o uczestnikach OM i nauczycielach.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie pary nieujemnych liczb całkowitych x, y spełniające równość

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}. \tag{1}$$

Jestem jedną z osób oceniających rozwiązania tego zadania. Przeczytałem już około 450 prac. Mam nieodpartą ochotę wypowiedzenia się na temat przeczytanych tekstów. Zadanie nie było trudne. W zasadzie były dwa typy rozwiązań. Część osób rozwiązujących zadanie dowodziła, że Liczby $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ są całkowite, a potem rozwiązywała dalej. Inni rozpoczynali od wykazania, że jeśli obie liczby x, y są dostatecznie duże, to $\sqrt{xy} > \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Zacznę od pierwszej metody. Jeśli $x = 0$, to $= \sqrt{y} + \sqrt{y} = 2\sqrt{y}$, więc $y = 0$. W taki sam sposób stwierdzamy, że jeśli $y = 0$, to $x = 0$. Oczywiście para $(0,0)$ jest rozwiązaniem równania. W dalszym ciągu zakładam, że $x > 0$ i $y > 0$, zatem $x \geqslant 1$ i $y \geqslant 1$. Ponieważ $\sqrt{xy} - \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, więc $xy - 2\sqrt{xy(x+y)} + x + y = x + 2\sqrt{xy} + y$. Po uproszczeniu

$$\sqrt{xy} - 2\sqrt{x+y} = 2. \tag{2}$$

Stąd $xy - 4\sqrt{xy} + 4 = 4(x+y)$, czyli $4\sqrt{xy} = xy - 4(x+y) + 4$, więc $4\sqrt{xy}$ jest liczbą całkowitą, więc $\sqrt{xy}$ jest liczbą wymierną i wobec tego liczbą całkowitą. (komentarz na temat tego stwierdzenia na końcu)

Ponieważ $\sqrt{xy} \in \mathbf{Z}$, więc $\sqrt{xy} - 2 = 2\sqrt{x+y} \in \mathbf{Z}$, zatem $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} - \sqrt{x+y} \in \mathbf{Z}$. Niech $c = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Wobec tego $c^2 - 2c\sqrt{x} + x = y$. Wynika stąd, że $\sqrt{x} = \frac{c^2+x-y}{2c} \in \mathbf{Q}$, więc $\sqrt{x} \in \mathbf{Z}$. Wobec tego również $\sqrt{y} = c - \sqrt{x} \in \mathbf{Z}$. Z równości (1) i (2) wynika, że

$$-2 = -\sqrt{xy} + 2\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = \sqrt{xy} - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = \left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{y} - 2\right) - 4\,,$$

czyli

$$\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{y} - 2\right) = 2\,. \tag{3}$$

Załóżmy, że $x \leqslant y$. Liczby $\sqrt{x} - 2$ i $\sqrt{y} - 2$ są całkowite, więc albo $\sqrt{x} - 2 = -2$ i $\sqrt{y} - 2 = -1$ albo $\sqrt{x} - 2 = 1$ i $\sqrt{y} - 2 = 2$, więc $x = 0$ i $y = 1$ albo $x = 3^2 = 9$ i $y = 4^2 = 16$. Para $(0,1)$ nie spełnia równania, a para $(9,16)$ – spełnia.
Rozwiązaniami są więc trzy pary $(0,0)$, $(9,16)$ i $(16,9)$. $\square$

To rozwiązanie można skrócić na wiele sposobów. Jeden z nich poniżej.
Lemat. Jeśli liczby $r, s, t \in \mathbf{Z}$ są nieujemne i $\sqrt{r} + \sqrt{s} + \sqrt{t} \in \mathbf{Z}$, to $\sqrt{r}, \sqrt{s}, \sqrt{t} \in \mathbf{Z}$.
Dowód. Jeśli jedna z liczb $\sqrt{r}, \sqrt{s}, \sqrt{t}$, np. $\sqrt{r}$ jest całkowita, to również suma dwu pozostałych, w tym wypadku $\sqrt{s} + \sqrt{t} = C$ też jest całkowita. Wtedy $t = (C - \sqrt{s})^2 = C^2 - 2C\sqrt{s} + s$, więc liczba $2C\sqrt{s} = C^2 + s - t$ też jest całkowita, zatem albo $C = 0$ i wtedy $s = t = 0$, więc teza lematu zachodzi, albo $\sqrt{c} = \frac{C^2+s-t}{2C} \in \mathbf{Q}$, a to oznacza, że $\sqrt{s} \in \mathbf{Z}$ oraz $\sqrt{t} = C - \sqrt{s} \in \mathbf{Z}$, co oznacza, że w tym wypadku teza lematu zachodzi. Niech $c = \sqrt{r} + \sqrt{s} + \sqrt{t}$ oraz $r, s, t > 1$. Oczywiście $c > 3$ (a nawet $c > 4$). Mamy $(c - \sqrt{r})^2 = (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2$, więc $c^2 + r - s - t - 2c\sqrt{r} = 2\sqrt{st}$. Stąd po podniesieniu obu stron do kwadratu wnioskujemy, że liczba $u = -4c(c^2 + r - s - t)\sqrt{r}$ jest całkowita. Mamy $c^2 + r - s - t = 2c\sqrt{r} + 2\sqrt{st} > 0$, zatem $\sqrt{r} = \frac{u}{-4c(c^2+r-s-t)} \in \mathbf{Q}$ i wobec tego $\sqrt{r} \in \mathbf{Z}$. Oznacza to, że lemat został już udowodniony. $\square$

Z równości (1) wynika, że $xy = 2x + 2y + 2\sqrt{x(x+y)} + 2\sqrt{y(x+y)} + 2\sqrt{xy}$. Z tej równości i z lematu wynika, że istnieje taka liczba całkowita m_1, że $4xy = m_1^2$. Oczywiście liczba m_1 jest parzysta, więc istnieje taka liczba m, że $m_1 = 2m$ i wobec tego $xy = m^2$. Wobec tego wyjściowe równanie przyjmuje postać $m = \sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Z lematu wynika więc, że liczby $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ (i $\sqrt{x+y}$) są całkowite. Możemy więc skorzystać znów z równości (3) i zakończyć rozwiązanie, jak wyżej, w kilku wierszach. $\square$

A teraz obiecany drugi typ rozwiązań. Znów zaczniemy od założenia: $x, y > 0$. Ze względu na to, że x i y pełnią w zadaniu identyczne role, możemy założyć, że $y \geqslant x$. Wobec tego

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2y} + 2\sqrt{y} = \sqrt{y}(\sqrt{2}+2)\,,$$

więc $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{2} + 2$. Oznacza to, że $x \leqslant (2+\sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2} < 6 + 4 \cdot 1{,}5 = 12$. Z drugiej strony

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} > 2\sqrt{y}\,,$$

więc $\sqrt{xy} > 2\sqrt{y}$, zatem $\sqrt{x} > 2$ i wobec tego $x \geqslant 5$. Teraz rozwiążemy 7 równań dla kolejnych wartości liczby x korzystając z równania (3) zapisanego w postaci $\sqrt{y} = 2 + \frac{2}{\sqrt{x}-2}$.

5: $\sqrt{y} = 2 + \frac{2}{\sqrt{5}-2} = 2 + 2(\sqrt{5}+2) = 6 + 2\sqrt{5}$, więc $y = (6+2\sqrt{5})^2 = 4(14 + 6\sqrt{5}\,) \notin \mathbf{Z}$.
6: $\sqrt{y} = 2 + \frac{2}{\sqrt{6}-2} = 2 + (\sqrt{6}+2) = 4 + \sqrt{6}$, więc $y = (2+\sqrt{6})^2 = 10 + 4\sqrt{6} \notin \mathbf{Z}$.
7: $\sqrt{y} = 2 + \frac{2}{\sqrt{7}-2} = 2 + \frac{2}{3}(\sqrt{7}+2) = \frac{10+2\sqrt{7}}{3}$, więc $y = \left(\frac{10+2\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}(32 + 10\sqrt{7}\,) \notin \mathbf{Z}$.
8: $\sqrt{y} = 2 + \frac{2}{\sqrt{8}-2} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2} + 1 = 3 + \sqrt{2}$, więc $y = \left(3+\sqrt{2}\right)^2 = 11 + 6\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$.
9: $\sqrt{y} = 2 + \frac{2}{\sqrt{9}-2} = 4$, więc $y = 16$.
10: $\sqrt{y} = 2 + \frac{2}{\sqrt{10}-2} = 2 + \frac{\sqrt{10}+2}{3} = \frac{\sqrt{10}+8}{3}$, więc $y = \frac{74+16\sqrt{10}}{9} \notin \mathbf{Z}$.
11: $\sqrt{y} = 2 + \frac{2}{\sqrt{11}-2} = 2 + 2\frac{\sqrt{11}+2}{7} = \frac{2\sqrt{11}+18}{7}$, więc $y = \frac{4}{49}(92 + 18\sqrt{11}\,) \notin \mathbf{Z}$.

Sprawdzamy, że $\sqrt{9 \cdot 16} = 12 = 5 + 3 + 4 = \sqrt{9+16} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$, więc pary $(9, 16)$ i $(16, 9)$ i $(0, 0)$ są jedynymi rozwiązaniami równania (1). $\square$

Z aktualnej podstawy programowej (tzw. rozszerzenie): „stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych;”. Z tego twierdzenia (sfromułowanie i dowód niżej) wynika od razu, że wymierne pierwiastki wielomianu unormowanego (o współczynniku 1 przy najwyższej potędze) są liczbami całkowitymi. Dotyczy to również wielomianu postaci $x^n - a$, a to oznacza, że jeśli pierwiastek n–tego stopnia z liczby całkowitej a jest wymierny, to jest liczbą całkowitą. Twierdzenie to jest „od zawsze” w programie szkolnym. Bardzo wiele osób dowodziło je w szczególnym przypadku. Inni nie powołując się na nic pisali, że $\sqrt{xy}$ jest liczbą całkowitą. Część sprawdzających byłaby uszczęśliwiona, gdyby przynajmniej powołali się na to twierdzenie. Kilka, może kilkanaście osób to zrobiło. To znikoma część. Może warto po omówieniu tego twierdzenia na lekcji wywnioskować zeń, co wyżej napisałem. Można też zlecić uczniom udowodnienie niewymierności liczby $\sqrt[n]{n}$ dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$: wynika ona z łatwej do dowodu nierówności $1 < \sqrt[n]{n} < 2$.

Na zakończenie przypomnijmy twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Jeśli $1 \leqslant n \in \mathbf{Z}$ oraz $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ i liczba $x_0 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{NWD}(p,q) = 1$ jest pierwiastkiem równania $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$, , to $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

Dowód jest banalny. Podstawiając $x = \frac{p}{q}$ w równaniu i mnożąc je przez q^n otrzymujemy

$$0 = a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n\,.$$

Z tego równania wynika, że $p \mid a_0 q^n$ oraz $q \mid a_n p^n$. Stąd i z tego, że $\mathrm{NWD}(p,q) = 1$ wynika, że $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$, co kończy dowód tego szkolnego twierdzenia.