Olimpiada Matematyczna — kilka zadań i komentarzy

Nauczyciel nie musi umieć rozwiązać zadań olimpijskich — część z nich jest trudna, niektóre mogą być bardzo trudne. Nie trzeba też umieć natychmiast odpowiedzieć na każde uczniowskie pytanie. Oczywiście lepiej, gdy potrafimy odpowiedzieć, ale to nikt z nas nie umie odpowiedzieć na wszystkie możliwe pytania. Lepiej i to znacznie jest odpowiedzieć „nie wiem" niż udawać, że się wie i udając opowiadać nieprawdę. To młodzież może wyczuć szybko, a wtedy jest to, a przynajmniej może być, początek utraty autorytetu.

1. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą takimi funkcjami kwadratowymi, że nierówność $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x. Δ_f jest wyróżnikiem funkcji f, a Δ_g — wyróżnikiem funkcji g. Udowodnić, że $|\Delta_f| \geqslant |\Delta_g|$. (*bieżąca OM — wrzesień*)

Rozwiązanie (nieco inne niż na stronie OM, a na pewno inaczej zapisane)

Niech $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ i $g(x) = ax^2 + bx + c$. Najpierw wykażemy, że bez straty ogólności rozważań można założyć, że $A = 1$, $0 < a \leqslant 1$ i $B = 0$. Ponieważ w założeniach występują jedynie wartości bezwzględne wartości funkcji f i g, więc możemy je (lub jedną z nich) zastąpić funkcją przeciwną. Bez straty ogólności rozważań będziemy dalej zakładać, że $A > 0$ i $a > 0$.

Wobec tego istnieje taka liczba $M > 0$, że jeśli $|x| > M$, to zachodzą obie nierówności $Ax^2 + Bx + C > 0$ i $ax^2 + bx + c > 0$, zatem założenie przybiera postać

$$Ax^2 + Bx + C \geqslant ax^2 + bx + c, \text{ tzn. } (A-a)x^2 + (B-b)x + C - c \geqslant 0$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x > M$ i każdej liczby rzeczywistej $x < -M$. Wobec tego $A \geqslant a > 0$. Jeśli pomnożymy funkcję kwadratową przez liczbę $t \neq 0$, to jej wyróżnik zostanie pomnożony przez liczbę $t^2 > 0$. Możemy więc obie funkcje f i g pomnożyć przez dowolną liczbę rzeczywistą $t \neq 0$ — nie zmieni to ani założenia ani tezy. Pomnóżmy przez $t = \frac{1}{A}$. Założenie przyjmuje postać $|x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}| \geqslant |\frac{a}{A}x^2 + \frac{b}{A}x + \frac{c}{A}|$ dla każdego x. Przyjmujemy dalej, że $A = 1$, nie tracąc ogólności rozumowania. Wtedy $0 < a \leqslant 1$. Podstawienie $x = u + p$ prowadzi do wzoru $x^2 + Bx + C = u^2 + \tilde{B}u + \tilde{C}$, gdzie $\tilde{B}, \tilde{C}$ są odpowiednio dobranymi liczbami ($\tilde{B} = 2p + B$, $\tilde{C} = \ldots$). Oczywiście najmniejsza wartość wyrażenia $x^2 + Bx + C$ jest równa najmniejszej wartości wyrażenia $u^2 + \tilde{B}u + \tilde{C}$. Z powszechnie znanego wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli wynika od razu, że $B^2 - 4C = \tilde{B}^2 - 4\tilde{C}$. Bez straty ogólności rozumowania przyjmujemy, że $B = 0$, czyli że osią symetrii pierwszej paraboli jest pionowa oś układu współrzędnych.

Po tych uwagach założenie przyjmuje postać

$$|f(x)| = |x^2 + C| \geqslant |g(x)| = |ax^2 + bx + c| \text{ dla każdego } x,$$

a teza $4|C| = |-4C| \geqslant |b^2 - 4ac|$.

Nierówność $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ jest równoważna nierówności

$$0 \leqslant (f(x))^2 - (g(x))^2 = \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) =$$
$$= \big((1-a)x^2 - bx + C - c\big)\big((1+a)x^2 + bx + C + c\big).$$

Ponieważ ta nierówność ma miejsce dla wszystkich rzeczywistych liczb x, więc rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$\big((1-a)x^2 - bx + C - c\big)\big((1+a)x^2 + bx + C + c\big)$$

mają parzyste krotności. Są dwie możliwości:

1° $f - g$ i $f + g$ mają te same pierwiastki i wtedy również wielomiany

$$f = \tfrac{1}{2}\big((f-g) + (f+g)\big) \text{ oraz } g = \tfrac{1}{2}\big(-(f-g) + (f+g)\big)$$

mają te same pierwiastki, zatem $g = af$, więc $|\Delta_g| = a^2|\Delta_f| \leqslant |\Delta_f|$;

2° krotności pierwiastków każdego z wielomianów $f - g$, $f + g$ są parzyste, zatem

$$b^2-4(1-a)(C-c)\leqslant 0 \quad \text{i} \quad b^2+4(1+a)(C+c)\leqslant 0$$
(gdy $a=1$, wielomian $f-g$ nie jest kwadratowy, więc musi być stałą nieujemną, czyli $b=0$ i $C-c\geqslant 0$, zatem również w tym wypadku $b^2-4(1-a)(C-c)\leqslant 0$).
Nierówność $b^2-4(1-a)(C-c)\leqslant 0$ jest równoważna nierówności $b^2-4ac\leqslant 4(C-c-aC)$, a nierówność $b^2-4(1+a)(C+c)\leqslant 0$ — nierówności $b^2-4ac\leqslant 4(C+c+aC)$. Wobec tego
$$b^2-4ac\leqslant \tfrac{1}{2}\cdot 4\big(C-c-aC+C+c+aC\big)=4C\leqslant 4|C|.$$
Wiemy też, że $|C|=|f(0)|\geqslant |g(0)|=|c|$. Wobec tego $4ac-b^2\leqslant 4ac\leqslant 4a|c|\leqslant 4|C|$. Mamy więc $|b^2-4ac|=\max(b^2-4ac,4ac-b^2)\leqslant 4|C|$, co należało dowieść. □

2. Udowodnić wzory Vieṫe'a dla równania $ax^3+bx^2+cz+d=0$, gdzie $a\neq 0$, więc równania trzeciego stopnia, czyli: jeśli równanie to ma trzy, niekoniecznie różne, pierwiastki x_1,x_2,x_3, to zachodzą równości $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=\frac{c}{a}$ oraz $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{d}{a}$.
Rozwiązanie. Mamy $ax^3+bx^2+cz+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$
$=ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+b(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1)x-ax_1\cdot x_2\cdot x_3$. Ta równość zachodzi dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$. Wobec tego współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x po obu stronach równości są identyczne, a to dowodzi prawdziwości wzorów Viète'a. □

Komentarz. Nie skorzystaliśmy z wzorów na pierwiastki równania trzeciego stopnia, bo ich użycie utrudniłoby dowód. Co więcej, przedstawiony dowód działa dla równań dowolnego stopnia (również kwadratowych), choć wzorów na pierwiastki równania stopnia piątego i wyższych nie ma.

3. Udowodnić, że jeśli x_1,x_2 są pierwiastkami równania $ax^2+bx+c=0$, to
$$a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac. \quad \square$$

4. Udowodnić, że jeśli x_1,x_2,x_3 są pierwiastkami równania $x^3+px+q=0$, to
$$(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$
Rozwiązanie. Z wzorów Viṫe'a wynika , że $x_1+x_2+x_3=0$, czyli $x_3=-(x_1+x_2)$. Wynika też, że $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p$ oraz $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-q$. Wobec tego
$-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)=-27x_1^2x_2^2x_3^2-4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3=$
$=-27x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2-4\big(x_1x_2-(x_1+x_2)^2\big)^3=$
$=-27x_1^2x_2^2\big((x_1-x_2)^2+4x_1x_2\big)-4\big(-3x_1x_2-(x_1-x_2)^2\big)^3=$
$=-27x_1^2x_2^2\big((x_1-x_2)^2+4x_1x_2\big)+4\big(3x_1x_2+(x_1-x_2)^2\big)^3=$
$=-27x_1^2x_2^2(x_1-x_2)^2+4\big(27x_1^2x_2^2(x_1-x_2)^2+9x_1x_2(x_1-x_2)^4+(x_1-x_2)^6=$
$=(x_1-x_2)^2\big(81x_1^2x_2^2+36x_1x_2(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^4\big)=$
$=(x_1-x_2)^2\big(9x_1x_2+2(x_1-x_2)^2\big)^2=(x_1-x_2)^2\big(2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2\big)^2=$
$=(x_1-x_2)^2(2x_1+x_2)^2(x_1+2x_2)^2=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2.$
Wzór został dowiedziony. □
Komentarz. Wyrażenie $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{1}{108}(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$ zwane jest wyróżnikiem wielomianu trzeciego stopnia. Łatwo można zauważyć, że jest ono ujemne, gdy wielomian ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, zeruje się, gdy wieloman ma pierwiastek podwójny (lub potrójny). Gdy wielomian trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych ma jeden pierwiastek rzeczywisty (pojedynczy), to ma też dwa pierwiastki nierzeczywiste sprzężone i wtedy wyróżnik jest dodatni. Ten fakt był przez długi czas uważany za poważny mankament wzorów Cardano. Jednak można udowodnić, że nie istnieją wzory na pierwiastki równania trzeciego stopnia, w których wystąpiłyby jedynie cztery działania arytmetyczne i pierwiastkowania

(każde skończoną liczbę razy) bez pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej. Dowód nie jest trudny, ani długi, jednak wymaga pewnej wiedzy — elementów teorii Galois (Birkhof, McLane „Przegląd algebry współczesnej").

W dowodzie wzorów Viète'a skorzystaliśmy z tego, że wielomian wyznacza swoje współczynniki jednoznacznie. To też w zasadzie kiedyś należałoby udowodnić, a co najmniej sformułować twierdzenie, o którym w „normalnej" klasie trudno mówić. Przypomnę

Twierdzenie o jednoznaczności zapisu wielomianu

Niech $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ i $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = 0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = 0, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-1}^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} + a_nx_{n-1}^n = 0, \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = 0, \end{cases}$$

to $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n = 0$.

A teraz trochę mocniejsza wersja

Twierdzenie o wyznaczeniu współczynników wielomianu

Niech $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ i $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Istnieje wtedy dokładnie jeden taki zestaw liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, że

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = b_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = b_1, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-1}^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} + a_nx_{n-1}^n = b_{n-1}, \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = b_n. \end{cases}$$

To twierdzenie uogólnia dobrze znane stwierdzenie (czasem twierdzenie, a czasem pewnik) mówiące, że przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

Będziemy dowodzić przez indukcję względem n. Zaczniemy od $n = 1$. Jeśli $x_0 < x_1$ oraz $a_0 + a_1x_0 = b_0$ i $a_0 + a_1x_1 = b_1$, to $a_1(x_1 - x_0) = b_1 - b_0$, zatem $a_1 = \frac{b_1 - b_0}{x_1 - x_0}$ i $a_0 = b_0 - \frac{b_1 - b_0}{x_1 - x_0}x_0$. Pierwsze równanie jest spełnione w oczywisty sposób. Drugie też, bo różnica pierwszego i drugiego jest spełniona.

Załóżmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n oraz że

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} \quad \text{i} \quad b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Udowodnimy, że istnieje dokładnie jeden $(n+2)$–elementowy taki ciąg $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$, że

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n + a_{n+1}x_0^{n+1} = b_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n + a_{n+1}x_1^{n+1} = b_1, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n + a_{n+1}x_2^{n+1} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-1}^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} + a_nx_{n-1}^n + a_{n+1}x_{n-1}^{n+1} = b_{n-1}, \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n + a_{n+1}x_n^{n+1} = b_n, \\ a_0 + a_1x_{n+1} + a_2x_{n+1}^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n+1}^{n-1} + a_nx_{n+1}^n + a_{n+1}x_{n+1}^{n+1} = b_{n+1}, \end{cases}$$

Odejmimy pierwsze równanie od drugiego i wynik podzielmy przez $x_1 - x_0$:
$a_1 + a_2(x_1 + x_0) + a_3(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) + \ldots + a_{n-1}(x_1^{n-2} + x_1^{n-3}x_0 + x_1^{n-4}x_0^2 + \ldots + x_0^{n-2}) + a_n(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + x_1^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0^{n-1}) + a_{n+1}(x_1^n + x_1^{n-1}x_0 + x_1^{n-2}x_0^2 + \ldots + x_0^n) = \frac{b_1-b_0}{x_1-x_0}$, co można zapisać w postaci

$$(a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n) + \\ + (a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1})x_1 + \ldots + (a_n + a_{n+1}x_0)x_1^{n-1} + a_{n+1}x_1^n = \frac{b_1-b_0}{x_1-x_0}.$$

Potem to samo robimy z kolejnymi równaniami: odejmujemy od każdego z nich pierwsze i dzielimy wynik kolejno przez $x_2 - x_0$, $x_3 - x_0$, $\ldots$, $x_{n+1} - x_0$. Otrzymujemy równania:

$$(a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n) + \\ + (a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1})x_2 + \ldots + (a_n + a_{n+1}x_0)x_2^{n-1} + a_{n+1}x_2^n = \frac{b_2-b_0}{x_2-x_0},$$

$$(a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n) + \\ + (a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1})x_3 + \ldots + (a_n + a_{n+1}x_0)x_3^{n-1} + a_{n+1}x_3^n = \frac{b_3-b_0}{x_3-x_0},$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$(a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n) + \\ + (a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1})x_{n+1} + \ldots + (a_n + a_{n+1}x_0)x_{n+1}^{n-1} + a_{n+1}x_{n+1}^n = \frac{b_{n+1}-b_0}{x_{n+1}-x_0}.$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że istnieje dokładnie jeden takin zestaw liczb $c_0, c_1, \ldots, c_n$, że

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \ldots + c_{n-1}x_1^{n-1} + c_nx_1^n = \frac{b_1-b_0}{x_1-x_0}, \\ c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + \ldots + c_{n-1}x_2^{n-1} + c_nx_2^n = \frac{b_2-b_0}{x_2-x_0}, \\ c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + \ldots + c_{n-1}x_3^{n-1} + c_nx_3^n = \frac{b_3-b_0}{x_3-x_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \ldots + c_{n-1}x_n^{n-1} + c_nx_n^n = \frac{b_n-b_0}{x_n-x_0}, \\ c_0 + c_1x_{n+1} + c_2x_{n+1}^2 + \ldots + c_{n-1}x_{n+1}^{n-1} + c_nx_{n+1}^n = \frac{b_{n+1}-b_0}{x_{n+1}-x_0}. \end{cases}$$

Powinny więc być spełnione równości

$a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n = c_0,$

$a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1} = c_1,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_n + a_{n+1}x_0 = c_{n-1},$

$a_{n+1} = c_n.$

Z założenia indukcyjnego wynika, istnieje dokładnie jeden taki zestaw liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, że te równości zachodzą. Liczba $a_0 = 0$ też jest jednoznacznie wyznaczona. Twierdzenie zostało udowodnione. Dowód nie jest trudny, jak widać. Nie jest też długi. Jednak poprawne napisanie go przez ucznia jest wyzwaniem — nie jest on szkolny. W istocie rzeczy autor tego tekstu miał przed oczami wyznacznik Vandermonde'a i zapisał część obliczeń tam występujących nie wspominając o wyznacznikach w ogóle. Zadanie można dawać też w wersji z pochodnymi: trzeba nałożyć tyle warunków, ile jest współczynników, np. współczynniki wielomianu n–tego stopnia są jednoznacznie wyznaczone przez jego wartość w $n-2$ punktach i pierwsze pochodne w dwóch z nich, albo przez pierwszą i drugą w jednym z nich.