Olimpiada Matematyczna — kilka zadań

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb a, b, c zachodzi nierówność $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.
Uwaga Zadanie pojawiło się w I Olimpiadzie Matematycznej (1949 r.) na poziomie B (wtedy były dwa poziomy zadań), z czego później zrezygnowano. B był łatwiejszy. Potem to zadanie pojawiło się albo na jakiejś próbnej maturze, albo na maturze — nie pamiętam.
Rozwiązanie 1. $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \geqslant 0$, bo kwadraty liczb rzeczywistych są nieujemne.$\square$.
Rozwiązanie 2. Wyrażenie $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$ można potraktować jako wielomian kwadratowy zmiennej a. Jego wyróżnik to $\Delta_a = (b+c)^2-4(b^2+c^2-bc) = -3b^2+6bc-3c^2 = -3(b-c)^2 \leqslant 0$, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

2. Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.
(*matura 2005, zadanie 17),*
a to jest zadanie z I stopnia X OM:
Wykazać, że

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4. \tag{1}$$

Rozwiązanie 1. Zachodzą równości $(1+\sqrt{2})^3 = 1+3\sqrt{2}+3\cdot 2+2\cdot\sqrt{2} = 7+5\sqrt{2}$ oraz $(-1+\sqrt{2})^3 = -1+3\sqrt{2}-3\cdot 2+2\cdot\sqrt{2} = -7+5\sqrt{2}$, zatem
$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 1+\sqrt{2}-(-1+\sqrt{2}) = 2.\square$
Rozwiązanie 2. Zachodzi równość $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$.
Z tego wzoru wnioskujemy, że jeśli $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$, to
$x^3 = (7+5\sqrt{2})-(5\sqrt{2}-7)-3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot x = =14-3x\sqrt[3]{7^2-5^2\cdot 2} = 14-3x$. Interesująca nas liczba x jest więc pierwiastkiem (rzeczywistym) równania $0 = x^3+3x-14 = (x-2)(x^2+2x+7)$, a ponieważ $x^2+2x+7 = (x+1)^2+6 > 6$, wiec równanie to ma dokładnie jeden pierwiastek, $x = 2$. $\square$
Komentarz. Druga metoda jest bardzo naturalna z punktu widzenia osób, które już to rozumowanie widziały, a do tych należą ci wszyscy, którzy kiedyś zostali zapoznani z wzorami Cardano na pierwiastki równania trzeciego stopnia: $x^3+px+q=0$. Szukamy mianowicie pierwiastka tego równania w postaci $x = u+v$. Ma więc zachodzić równość $0 = x^3+px+q = (u+v)^3+p(u+v)+q = (u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)$, więc wystarczy, aby były spełnione równości $u^3+v^3 = -q$ oraz $uv = -\frac{p}{3}$. Druga jest równoważna równości $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Oznacza to, że liczby u^3 i v^3 są pierwiastkami równania kwadratowego $t^2+qt-\frac{p^3}{27} = 0$ (wzory Viète'a). Stąd natychmiast otrzymujemy równości $u^3 = -\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ i $u^3 = -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, z których wynika, że
$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$. Innymi słowy zadanie olimpijskie umieszczone na maturze daje możliwość omówienia czegoś np. na kółku. Tu można zatrzymać się nad kwestią pojawiania się w naturalny sposób liczb zespolonych w matematyce. Jeśli zechcemy skorzystać z tych wzorów w celu rozwiązania równania $x^3-7x+6=0$, to natkniemy się na liczbę $\sqrt{\frac{36}{4}-\frac{343}{27}} = \sqrt{-\frac{100}{27}}$. Ta drobna nieprzyjemność powoduje, że trzeba było zacząć używać pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych i już po

około 200 latach matematycy zdołali umieścić liczby zespolone na płaszczyźnie i w ten sposób usprawiedliwić ich istnienie. Jeśli zaczynamy mówić o liczbach zespolonych, to pierwiastki każdego stopnia większego od 1 przestają mieć jednoznaczną wartość i na to rady nie ma. Można więc zadać pytanie uczniom: na „zdrowy chłopski rozum" powinno tych pierwiastków równania $x^3+px+q=0$ pojawić się na ogół $3\cdot2\cdot3\cdot2=36$, a są najwyżej trzy. Co się dzieje? Chodzi oczywiście o to, że część wynikań nie jest jednak równoważnościami i nie każdy wybór pierwiastków zespolonych prowadzi do pierwiastka równania x^3+px+q.

3. Udowodnić wzory Viète'a dla równania $ax^3+bx^2+cz+d=0$, gdzie $a\neq0$, więc równania trzeciego stopnia, czyli: jeśli równanie to ma trzy, niekoniecznie różne, pierwiastki x_1,x_2,x_3, to zachodzą równości $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=\frac{c}{a}$ oraz $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{d}{a}$.
Rozwiązanie. Mamy $ax^3+bx^2+cz+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$
$=ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+b(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1)x-ax_1\cdot x_2\cdot x_3$. Ta równość zachodzi dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$. Wobec tego współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x po obu stronach równości są identyczne, a to dowodzi prawdziwości wzorów Viète'a. □
. *Komentarz.* Nie skorzystaliśmy z wzorów na pierwiastki równania trzeciego stopnia, bo z ich użyciem byłoby trudniej udowodnić te równości. Co więcej ten dowód działa dla równań dowolnego stopnia (nie wykluczając kwadratowych), choć wzorów na pierwiastki równania stopnia piątego i wyższych nie ma.

4. Udowodnić, że jeśli x_1,x_2 są pierwiastkami równania $ax^2+bx+c=0$, to
$$a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac.\ \square$$

5. Udowodnić, że jeśli x_1,x_2,x_3 są pierwiastkami równania $x^3+px+q=0$, to
$$(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$
Rozwiązanie. Z wzorów Viète'a wynika , że $x_1+x_2+x_3=0$, czyli $x_3=-(x_1+x_2)$. Wynika też, że $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p$ oraz $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-q$. Wobec tego
$-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)=-27x_1^2x_2^2x_3^2-4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3=$
$=-27x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2-4\big(x_1x_2-(x_1+x_2)^2\big)^3=$
$=-27x_1^2x_2^2\big((x_1-x_2)^2+4x_1x_2\big)-4\big(-3x_1x_2-(x_1-x_2)^2\big)^3=$
$=-27x_1^2x_2^2\big((x_1-x_2)^2+4x_1x_2\big)+4\big(3x_1x_2+(x_1-x_2)^2\big)^3=$
$=-27x_1^2x_2^2(x_1-x_2)^2+4\big(27x_1^2x_2^2(x_1-x_2)^2+9x_1x_2(x_1-x_2)^4+(x_1-x_2)^6=$
$=(x_1-x_2)^2\big(81x_1^2x_2^2+36x_1x_2(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^4\big)=$
$=(x_1-x_2)^2\big(9x_1x_2+2(x_1-x_2)^2\big)^2=(x_1-x_2)^2\big(2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2\big)^2=$
$=(x_1-x_2)^2(2x_1+x_2)^2(x_1+2x_2)^2=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2.$
Wzór został dowiedziony. □
Komentarz. Wyrażenie $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{1}{108}(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$ zwane jest wyróżnikiem wielomianu trzeciego stopnia. Łatwo można zauważyć, że jest ono ujemne, gdy wielomian ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, zeruje się, gdy wieloman ma pierwiastek podwójny (lub potrójny). Gdy wielomian trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych ma jeden pierwiastek rzeczywisty (pojedynczy), to ma też dwa pierwiastki nierzeczywiste sprzężone i wtedy wyróżnik jest dodatni. Ten fakt był przez długi czas uważany za poważny mankament wzorów Cardano. Jednak można udowodnić, że nie

istnieją wzory na pierwiastki równania trzeciego stopnia, w których wystąpiłyby jedynie cztery działania arytmetyczne i pierwiastkowania (każde skończoną liczbę razy) bez pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej. Dowód nie jest trudny, ani długi, jednak wymaga pewnej wiedzy — teorii Galois w pewnym zakresie. (Birkhof, McLane „Przegląd algebry współczesnej")

6. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą takimi funkcjami kwadratowymi, że nierówność $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x. Δ_f jest wyróżnikiem funkcji f, a Δ_g — wyróżnikiem funkcji g. Udowodnić, że $|\Delta_f| \geqslant |\Delta_g|$. *(bieżąca OM — wrzesień)*

Rozwiązanie (nieco inne niż na stronie OM, a na pewno inaczej zapisane)

Niech $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ i $g(x) = ax^2 + bx + c$. Najpierw wykażemy, że bez straty ogólności rozważań można założyć, że $A = 1$, $0 < a \leqslant 1$ i $B = 0$. Ponieważ w założeniach występują jedynie wartości bezwzględne wartości funkcji f i g, więc możemy je (lub jedną z nich) zastąpić funkcją przeciwną. Bez straty ogólności rozważań będziemy dalej zakładać, że $A > 0$ i $a > 0$.

Wobec tego istnieje taka liczba $M > 0$, że jeśli $|x| > M$, to zachodzą nierówności $Ax^2 + Bx + C > 0$ i $ax^2 + bx + c > 0$, zatem założenie przybiera postać

$$Ax^2 + Bx + C \geqslant ax^2 + bx + c, \text{ tzn. } (A - a)x^2 + (B - b)x + C - c \geqslant 0$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x > M$ i każdej liczby rzeczywistej $x < -M$. Wobec tego $A \geqslant a > 0$. Jeśli pomnożymy funkcję kwadratową przez liczbę $t \neq 0$, to jej wyróżnik zostanie pomnożony przez liczbę $t^2 > 0$. Możemy więc obie funkcje f i g pomnożyć przez dowolną liczbę rzeczywistą $t \neq 0$ — nie zmieni to ani założenia ani tezy. Pomnóżmy przez $t = \frac{1}{A}$. Założenie przyjmuje postać $|x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}| \geqslant |\frac{a}{A}x^2 + \frac{b}{A}x + \frac{c}{A}|$ dla każdego x. Przyjmujemy dalej, że $A = 1$, nie tracąc ogólności rozumowania. Wtedy $0 < a \leqslant 1$. Podstawienie $x = u + p$ prowadzi do wzoru $x^2 + Bx + C = u^2 + \tilde{B}u + \tilde{C}$, gdzie $\tilde{B}, \tilde{C}$ są odpowiednio dobranymi liczbami ($\tilde{B} = 2p + B$, $\tilde{C} = \ldots$). Oczywiście najmniejsza wartość wyrażenia $x^2 + Bx + C$ jest równa najmniejszej wartości wyrażenia $u^2 + \tilde{B}u + \tilde{C}$. Z powszechnie znanego wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli wynika od razu, że $B^2 - 4C = \tilde{B}^2 - 4\tilde{C}$. Bez straty ogólności rozumowania przyjmujemy, że $B = 0$, czyli że osią symetrii pierwszej paraboli jest pionowa oś układu współrzędnych.

Po tych uwagach założenie przyjmuje postać

$$|f(x)| = |x^2 + C| \geqslant |g(x)| = |ax^2 + bx + c| \text{ dla każdego } x,$$

a teza $4|C| = |-4C| \geqslant |b^2 - 4ac|$.

Nierówność $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ jest równoważna nierówności

$$0 \leqslant (f(x))^2 - (g(x))^2 = \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) = \\ = \big((1 - a)x^2 - bx + C - c\big)\big((1 + a)x^2 + bx + C + c\big).$$

Ponieważ ta nierówność ma miejsce dla wszystkich rzeczywistych liczb x, więc rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$\big((1 - a)x^2 - bx + C - c\big)\big((1 + a)x^2 + bx + C + c\big)$$

mają parzyste krotności. Są dwie możliwości:

1° $f - g$ i $f + g$ mają te same pierwiastki i wtedy również wielomiany

$$f = \tfrac{1}{2}\big((f - g) + (f + g)\big) \text{ oraz } g = \tfrac{1}{2}\big(-(f - g) + (f + g)\big)$$

mają te same pierwiastki, zatem $g = af$, więc $|\Delta_g| = a^2|\Delta_f| \leqslant |\Delta_f|$;

2° krotności pierwiastków każdego z wielomianów $f - g$, $f + g$ są parzyste, zatem $b^2 - 4(1 - a)(C - c) \leqslant 0$ i $b^2 + 4(1 + a)(C + c) \leqslant 0$ (gdy $a = 1$, wielomian $f - g$ nie jest kwadratowy, więc musi być stałą nieujemną, czyli $b = 0$ i $C - c \geqslant 0$, zatem

również w tym wypadku $b^2 - 4(1-a)(C-c) \leqslant 0$).
Nierówność $b^2-4(1-a)(C-c) \leqslant 0$ jest równoważna nierówności $b^2-4ac \leqslant 4(C-c-aC)$, a nierówność $b^2 - 4(1+a)(C+c) \leqslant 0$ — nierówności $b^2 - 4ac \leqslant 4(C+c+aC)$. Stąd wynika, że

$$b^2 - 4ac \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot 4\big(C - c - aC + C + c + aC\big) = 4C \leqslant 4|C|.$$

Wiemy też, że $|C| = |f(0)| \geqslant |g(0)| = |c|$. Wobec tego $4ac - b^2 \leqslant 4ac \leqslant \leqslant 4a|c| \leqslant 4|C|$. Mamy więc $|b^2 - 4ac| = \max(b^2 - 4ac, 4ac - b^2) \leqslant 4|C|$, co należało dowieść. $\square$

7. Wielomian f, którego fragment wykresu przedstawiono na poniższym rysunku spełnia warunek $f(0) = 90$. Wielomian g dany jest wzorem $g(x) = x^3 - 14x^2 + 63x - 90$. Wykaż, że $g(x) = -f(-x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. (*matura 2008, zadanie 1).*

Tego zadania rozwiązywać nie będę, bo kazano dowieść prawdziwości fałszywego stwierdzenia opuściwszy założenie, że stopniem wielomianu f jest liczba 3. A warto o nim powiedzieć uczniom, bo „przy okazji" można zlecić znalezienie jakiegoś wielomianu wysokiego stopnia, który np. w każdym punkcie przedziału $[-20, 20]$ różni się od f o mniej niż 0,01 (więc wykresów na tym przedziale odróżnić nie można).

8. Dowieść, że jeżeli $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ac-x^2-y^2-z^2)$, gdzie a, b, c, x, y, z oznaczają liczby rzeczywiste, to $a=b=c$ oraz $x=y=z=0$. (*IX OM, II st.)*
Rozwiązanie. Mamy $-x^2-y^2-z^2 = (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$. Lewa strona jest liczbą niedodatnią, a prawa — nieujemną. Z ich równości wynika, że obie są równe 0, zatem $x=y=z=0$ oraz $a=b=c$. $\square$

9. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^5+y^5+z^5=1 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.
Rozwiązanie 1. Każda z trójek postaci $(t,-t,1)$, $(t,1,-t)$, $(1,t,-t)$ jest rozwiązaniem układu równań. Załóżmy teraz, że trójka (x,y,z) jest rozwiązaniem. Ze względu na symetrię układu możemy założyć, że $z \leqslant 1$ oraz $x \geqslant y$. Wtedy $x+y = 1-z \geqslant 0$. Załóżmy, że dla pewnego $r > 0$ również trójka $(x+r, y-r, z)$ jest rozwiązaniem układu. Wtedy

$$\begin{aligned}
1 - z^5 &= (x+r)^5 + (y-r)^5 = \\
&= x^5 + y^5 + 5r(x^4-y^4) + 10r^2(x^3+y^3) + 10r^3(x^2-y^2) + 5r^4(x+y) = \\
&= 1 - z^5 + 5r(x-y)(x+y)(x^2+y^2) + 10r^2(x+y)(x^2-xy+y^2) + \\
&\qquad + 10r^3(x-y)(x+y) + 5r^4(x+y) = \\
&= 1 - z^5 + 5r(x-y)(x+y)(x^2+y^2) + 5r^2(x+y)((x-y)^2+x^2+y^2) + \\
&\qquad + 10r^3(x-y)(x+y) + 5r^4(x+y) \geqslant 1 - z^5
\end{aligned}$$

przy czym ostatnia nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x+y=0$, czyli gdy $z=1$, ale wtedy $y=-x$. Wobec tego dla każdego $z<1$ istnieje co najwyżej jedna taka para (x,y), że $x \geqslant y$ i trójka (x,y,z) jest rozwiązaniem badanego układu równań. Wykazaliśmy tym samym, że rozwiązań różnych od podanych na wstępie nie ma.
Rozwiązanie drugie Jeśli trójka (x,y,z) jest rozwiązaniem danego układu równań, to $0 = (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) = \frac{5}{2}(x+y)(y+z)(z+x)\big((x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\big)$, zatem ta równość zachodzi

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jedna z równości $x+y=0$, $y+z=0$ lub $z+x=0$. Z pierwszej z nich wynika, że $z=1$, z drugiej — $x=1$, a z trzeciej — $y=1$.
Uwaga. Niech $w(x,y,z)=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$. Mamy $w(-y,y,z)= =0$. Wobec tego jeśli potraktujemy wielomian w zmiennych x,y,z jako wielomian zmiennej x, którego współczynnikami są wielomiany zmiennych y,z, to jest on podzielny przez wielomian $x-(-y)=x+y$. Wynik jest wielomianem trzech zmiennych (lub zmiennej x, którego współczynnikami są wielomiany zmiennych y,z). Ponieważ $w(x,-z,z)=0$, więc jest on (jako wielomian zmiennej y) podzielny przez wielomian $y-(-z)=y+z$. Wynik dzielenia potraktowany jako wielomian zmiennej z jest podzielny przez $z+x$. Wobec tego istnieje wielomian taki v zmiennych x,y,z, że $w(x,y,z)=(x+y)(y+z)(z+x)v(x,y,z)$. Ponieważ wielomiany w oraz $(x+y)(y+z)(z+x)$ są symetryczne, więc również wielomian v jest symetryczny. Ponieważ $w(tx,ty,tz)=t^5w(x,y,z)$ i $(tx+ty)(ty+tz)(tz+tx)=t^3(x+y)(y+z)(z+x)$ dla ,razu, że istnieją takie liczby a,b, że $v(x,y,z)=ax^2+ay^2+az^2+bxy++byz+bzx$ dla dowolnych liczb x,y,z. Mamy $\frac{w(1,1,0)}{(1+1)(1+0)(0+1)}=15$ oraz $\frac{w(2,1,0)}{(2+1)(1+0)(0+2)}=35$, więc $15=v(1,1,0)=2a+b$ i $35=v(2,1,0)= =5a+2b$, zatem $a=5a+2b-2(2a+b)=35-30=5$, więc $b=15-2\cdot 5=5$. Stąd wynika równość $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5= =5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$ dla wszystkich trójek (x,y,z).
Wreszcie można ten układ rozwiązać traktując np. z jako parametr i wyznaczyć x i y w zależności od z, ale tego już robić nie będziemy.

Jeszcze jedna uwaga. Każdy wielomian symetryczny dwu zmiennych w, więc spełniający warunek $w(x,y)=W(y,x)$ dla każdej pary liczb x,y można zapisać jako wielomian zmiennych $u=x+y$ i $v=xy$. Dowód tego twierdzenia trudny nie jest i nadaje się dla licealistów zainteresowanych matematyką. W wypadku trzech zmiennych założeniem jest równość $w(x,y,z)=w(x,z,y)=w(y,x,z)=w(y,z,x)=w(z,x,y)=w(z,y,x)$, a teza tez wymaga drobnej zmiany: można go zapisać jako wielomian zmiennych $u_1=x+y+x$, $u_2=xy+xz+yz$ i $u_3=xyz$. Można je też dać jako zadanie, trudniejsze od poprzedniego, ale „do zrobienia". Twierdzenie jest też prawdziwe dla wielomianów n zmiennych, dowód w zasadzie nie jest trudniejszy niż dla trzech zmiennych, jednak w zapisie jest na tyle nieprzyjemny, że w większości książek, z którymi miałem do czynienia twierdzenie jest bez dowodu, który jednak da się znaleźć w literaturze, np. w książce Mostowskiego i Starka „Elementy algebry wyższej". Oczywiście drugi sposób to zastosowanie twierdzenia do wielomianu symetrycznego $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$. Dodam jeszcze, że zadanie zostało zgłoszone jako układ trzech równań, ale równanie $x^3+y^3+z^3=1$ (środkowe) usunęliśmy jako zbędne — w końcu zadanie trafiało na finał OM, więc szło o rozróżnienie najlepszych uczniów. I jeszcze jedno. To, że np. $y+z$ jest dzielnikiem wielomianu $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ wynika od razu z tego, że po podstawieniu $z=-y$ otrzymujemy 0 — traktujemy całość jako wielomian zmiennej z i stosujemy twierdzenie Bézout.

10. Rozłożyć na czynniki wielomian $x^3+y^3+z^3-3xyz$. □
Nie rozwiązuję, zostawiam jako ćwiczenie.

Warto **przed** zdefiniowaniem wielomianu (funkcji wielomianowej) zrobić zadanie, dzięki któremu definicja stopnia wielomianu i zresztą samego wielomianu staje się sensowna (a w każdym razie przestaje budzić ewentualne wątpliwości logiczne). Chodzi o jednoznaczność zapisu w postaci sumy. Przypomnę

Twierdzenie o jednoznaczności zapisu wielomianu

Niech $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ i $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = 0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = 0, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-1}^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} + a_nx_{n-1}^n = 0, \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = 0, \end{cases}$$

to $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$.

Niestety nie można na razie skorzystać z twierdzenia o liczbie pierwiastków wielomianu danego stopnia, bo przed wykazaniem tego twierdzenia w zasadzie nie da się zdefiniować stopnia wielomianu, więc też dzielenia z resztą itd. Na studiach na ogół korzysta się z własności wyznacznika Vandermonde'a, ale nie jest to konieczne. Można rzecz załatwić za pomocą indukcji względem n. Zaczniemy od $n = 1$. Udowodnimy, że jeśli $x_0 < x_1$ i $a_0 + a_1x_0 = 0$ oraz $a_0 + a_1x_1 = 0$, to $a_0 = a_1 = 0$. Jest tak, bo po odjęciu danych równości otrzymujemy $a_1(x_1 - x_0) = 0$, z czego wynika, że $a_1 = 0$ (można podzielić przez $x_1 - x_0$, bo $x_1 \neq x_0$). Mamy więc $0 = a_0 + a_1x_0 = a_0 + 0 \cdot x_1 = a_0$. Udowodniliśmy więc twierdzenie dla $n = 1$. Załóżmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n oraz że $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ i $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ są takimi liczbami, że

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n + a_{n+1}x_0^{n+1} = 0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n + a_{n+1}x_1^{n+1} = 0, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n + a_{n+1}x_2^{n+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-1}^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} + a_nx_{n-1}^n + a_{n+1}x_{n-1}^{n+1} = 0, \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n + a_{n+1}x_n^{n+1} = 0, \\ a_0 + a_1x_{n+1} + a_2x_{n+1}^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n+1}^{n-1} + a_nx_{n+1}^n + a_{n+1}x_{n+1}^{n+1} = 0, \end{cases}$$

Odejmimy pierwsze równanie od drugiego i wynik podzielmy przez $x_1 - x_0$:

$$a_1 + a_2(x_1 + x_0) + a_3(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) + \ldots + a_{n-1}(x_1^{n-2} + x_1^{n-3}x_0 + x_1^{n-4}x_0^2 + \ldots + x_0^{n-2}) + a_n(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + x_1^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0^{n-1}) + a_{n+1}(x_1^n + x_1^{n-1}x_0 + x_1^{n-2}x_0^2 + \ldots + x_0^n) = 0,$$

co można zapisać w postaci

$$(a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n) + \\ + (a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1})x_1 + \ldots + (a_n + a_{n+1}x_0)x_1^{n-1} + a_{n+1}x_1^n = 0.$$

Potem to samo robimy z kolejnymi równaniami: odejmujemy od każdego z nich pierwsze i dzielimy wynik kolejno przez $x_2 - x_0$, $x_3 - x_0$, $\dots$, $x_{n+1} - x_0$. Otrzymujemy równania:

$$(a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n) + \\ + (a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1})x_2 + \ldots + (a_n + a_{n+1}x_0)x_2^{n-1} + a_{n+1}x_2^n = 0,$$

$$(a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n) + \\ + (a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1})x_3 + \ldots + (a_n + a_{n+1}x_0)x_3^{n-1} + a_{n+1}x_3^n = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n) + \\ + (a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1})x_{n+1} + \ldots + (a_n + a_{n+1}x_0)x_{n+1}^{n-1} + a_{n+1}x_{n+1}^n = 0.$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że współczynniki przy kolejnych potęgach liczb $x_1 <$

$x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ są zerami:
$a_1 + a_2x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-2} + a_nx_0^{n-1} + a_{n+1}x_0^n = 0,$
$a_2 + a_3x_0 + \ldots + a_nx_0^{n-2} + a_{n+1}x_0^{n-1} = 0,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a_n + a_{n+1}x_0,$
$a_{n+1} = 0.$
Stąd już (znów indukcja) wynika od razu, że $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$. Twierdzenie zostało udowodnione. Dowód nie jest trudny, jak widać. Nie jest też długi. Jednak poprawne napisanie go przez ucznia jest wyzwaniem — nie jest on szkolny. W istocie rzeczy autor tego tekstu miał przed oczami wyznacznik Vandermonde'a i zapisał obliczenia tam występujące nie wspominając o wyznacznikach w ogóle. Zadanie można dawać też w wersji z pochodnymi: trzeba nałożyć tyle warunków, ile jest współczynników, np. współczynniki wielomianu n–tego stopnia są jednoznacznie wyznaczone przez jego wartość w $n-2$ punktach i pierwsze pochodne w dwóch z nich, albo przez pierwszą i drugą w jednym z nich.

11. Dowieść, że funkcje $\frac{1}{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{1+x^2}$ oraz 2^x wielomianami nie są, a funkcja $(2^x + 2^{-x})^2 - (2^x - 2^{-x})^2$ jest wielomianem. $\Box$

12. Dana jest prosta d równoległa do osi OX i punkt F leżący poza d. Udowodnić, że zbiór złożony z punktów równoodległych od F i d jest wykresem funkcji kwadratowej. $\Box$

13. Dane są liczby $A \neq 0, B, C, p$. Znaleźć takie równanie postaci $y = ax + b$, że układ równań

$$\begin{cases} y = ax + b, \\ y = Ax^2 + Bx + C \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, którym jest punkt $(p, Ap^2 + Bp + C)$.
Ta prosta zwana jest styczną do paraboli $y = Ax^2+Bx+C$ *w punkcie* (p, Ap^2+Bp+C).$\Box$

14. Dane są liczby $A \neq 0, B, C, p$. Dowieść, że styczna do paraboli $y = Ax^2 + Bx + C$ w punkcie $P = (p, Ap^2 + Bp + C)$ jest dwusieczną kąta między prostymi FP i $x = p$. $\Box$

15. Dane są liczby $a > b > 0$. Dowieść, że zbiór złożony ze wszystkich punktów $P = (x, y)$, których suma odległości od punktów $F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ i $F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ to zbiór opisany równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (równanie kanoniczne elipsy, F_1, F_2 — jej ogniska) $\Box$

16. Dane są liczby $a > b > 0$. Punkt $P = (p, q)$ leży na elipsie o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Znaleźć takie liczby A, B, C, że punkt P jest jedynym punktem wspólnym prostej o równaniu $Ax + By + C$ i elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (styczna do elipsy) $\Box$

17. Dowieść, że kąty między styczną do elipsy w punkcie P i półprostymi PF_1 i PF_2 są równe, a dla wszystkich punktów $X \neq P$ leżących na tej stycznej zachodzi nierówność $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$ oraz że suma $XF_1 + XF_2$ rośnie, gdy punkt X oddala się od P. $\Box$

Twierdzenie Gaussa o rozkładzie wielomianu o współczynnikach całkowitych
Jeśli liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, $k, l \geq 1$, liczby $b_0, b_1, \ldots, b_k, c_0, c_1, \ldots, c_l$ są wymierne i

$$W(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n = \left[b_0 + b_1x + \cdots b_kx^k\right] \cdot \left[c_0 + c_1x + \cdots c_lx^l\right] = u(x) \cdot v(x)$$

dla każdej liczby x, to istnieje taka liczba wymierna α, że wszystkie liczby
$$\alpha b_0, \alpha b_1, \ldots, \alpha b_k, \tfrac{1}{\alpha}c_0, \tfrac{1}{\alpha}c_1, \ldots, \tfrac{1}{\alpha}c_l$$
są całkowite.

W dowodzie — dla uproszczenia zapisu — przyjmiemy, że $0 = b_{k+1} = b_{k+2} = b_{k+3} = \ldots$ oraz $0 = c_{l+1} = c_{l+2} = c_{l+3} = \ldots$. Każda liczba całkowita jest dzielnikiem liczby 0, bowiem $0 = p \cdot 0$.

Niech $b_0 = \frac{\beta_0}{m}$, $b_1 = \frac{\beta_1}{m}$, $b_2 = \frac{\beta_2}{m}$, $\ldots$, $b_k = \frac{\beta_k}{m}$ przy czym liczby β_0, β_1, β_2, $\ldots$, β_k są całkowite, ich największym wspólnym dzielnikiem jest 1, $m \in \mathbb{N}$. Liczby γ_0, γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_l są również całkowite, ich największym wspólnym dzielnikiem jest 1, $M \in \mathbb{N}$ i $c_0 = \frac{\gamma_0}{M}$, $c_1 = \frac{\gamma_1}{M}$, $c_2 = \frac{\gamma_2}{M}$, $\ldots$, $c_l = \frac{\gamma_l}{M}$.

Załóżmy, że liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby m. Nie jest ona dzielnikiem wszystkich liczb β_0, β_1, β_2, $\ldots$, β_k. Istnieje więc taki numer i, że p jest dzielnikiem liczb $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}$, ale nie jest dzielnikiem β_i, nie wykluczamy tego, że $i = 0$ (czyli β_0 nie dzieli się przez p). Zachodzą równości:
$$\begin{aligned}
\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} &= a_0,\\
\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{M} + \frac{\beta_1}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} &= a_1,\\
\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_2}{M} + \frac{\beta_1}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{M} + \frac{\beta_2}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} &= a_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_i}{M} + \frac{\beta_1}{m}\cdot\frac{\gamma_{i-1}}{M} + \cdots + \frac{\beta_{i-1}}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{M} + \frac{\beta_i}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} &= a_i\\
\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_{i+1}}{M} + \frac{\beta_1}{m}\cdot\frac{\gamma_i}{M} + \cdots + \frac{\beta_{i-1}}{m}\cdot\frac{\gamma_2}{M} + \frac{\beta_i}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{M} + \frac{\beta_{i+1}}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} &= a_{i+1}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Liczba a_i jest całkowita, więc liczba $\frac{\beta_0\gamma_i+\beta_1\gamma_{i-1}+\cdots+\beta_{i-1}\gamma_1+\beta_i\gamma_0}{mM}$ też jest całkowita. Ponieważ liczba mM jest podzielna przez p, więc również liczba $\beta_0\gamma_i+\beta_1\gamma_{i-1}+\cdots+\beta_{i-1}\gamma_1+\beta_i\gamma_0$ jest podzielna przez liczbę pierwszą p. Ponieważ liczby $\beta_0\gamma_i$, $\beta_1\gamma_{i-1}$, $\ldots$, $\beta_{i-1}\gamma_1$ są podzielne przez p, zatem również liczba $\beta_i\gamma_0$ dzieli się przez p. Liczba β_i przez liczbę pierwszą p nie dzieli się, zatem γ_0 musi się dzielić przez p.

Spójrzmy na następną równość. Wynika z niej, że liczba $\beta_0\gamma_{i+1}+\beta_1\gamma_i+\cdots+\beta_{i-1}\gamma_2+\beta_i\gamma_1+\beta_{i+1}\gamma_0$ jest podzielna przez p. Wobec tego że składniki $\beta_0\gamma_{i+1}$, $\beta_1\gamma_i$, $\ldots$, $\beta_{i-1}\gamma_2$, $\beta_{i+1}\gamma_0$ są podzielne przez p, liczba $\beta_i\gamma_1$ też jest przez p podzielna, ale stąd wynika, że liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby γ_1.

W taki sam sposób wykazujemy, że następne liczby γ_2, $\gamma_3, \ldots, \gamma_l$ są podzielne przez p. Możemy więc pomnożyć wielomian $b_0 + b_1x + \cdots b_kx^k = \frac{1}{m}\bigl(\beta_0 + \beta_1x + \cdots \beta_kx^k\bigr)$ przez p dzieląc jednocześnie wielomian $c_0 + c_1x + \cdots c_lx^l = \frac{1}{M}\bigl(\gamma_0 + \gamma_1x + \cdots \gamma_lx^l\bigr)$ przez tę liczbę.

Powtarzając opisaną procedurę z jakimkolwiek czynnikiem pierwszym liczby całkowitej $\frac{m}{p}$ zmniejszamy powtórnie ten mianownik. W końcu doprowadzimy do usunięcia wszystkich czynników pierwszych liczby m, a to oznaczać będzie, że w mianowniku pojawi się liczba 1.

Następnie rozkładamy na czynniki pierwsze liczbę M i wykazujemy, że jej czynniki pierwsze są wspólnymi dzielnikami liczb β_0, β_1, $\ldots$, β_k, co pozwala na pomnożenie drugiego czynnika iloczynu przez M i jednoczesne podzielenie pierwszego czynnika przez M. Można więc przyjąć, że $\alpha = \frac{m}{M}$. $\square$

Ten dowód został napisany drobiazgowo, ale w istocie rzeczy najtrudniejszą rzeczą jest zdanie sobie sprawy z prawdziwości twierdzenia, potem dowód nie jest problemem.

18. Udowodnić, że jeśli wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ma całkowite współczynniki i istnieje taka liczba pierwsza p, że $p \mid a_0$, $p \mid a_1, \ldots$, $p \mid a_{n-1}$, $p \nmid a_n$ i $p^2 \nmid a_0$, to wielomian w nie da się napisać w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

19. Udowodnić, że jeśli ramiona BC i DA trapezu $ABCD$ leżą na prostych prostopadłych, to $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BD^2$. (*zadanie z jakiejś próbnej matury*)
Rozwiązanie. Załóżmy, że $AB > CD$ i oznaczmy punkt przecięcia prostych AD i BC przez E. Mamy więc
$AC^2+BD^2 = AE^2+EC^2+BE^2+ED^2 = (AE^2+BE^2)+(EC^2+ED^2) = AB^2+CD^2$.
Zadanie rozwiązane. I co dalej zrobił Henryk Pawłowski w czasie lekcji, której część poświęcił temu zadaniu? Ano zapytał swych uczniów, w którym miejsc u skorzystali z równoległości boków AB i CD. Ponieważ nie skorzystali w żadnym miejscu, więc okazało się, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdego czworokąta. I to jeszcze nie był koniec. Padło pytanie o odwrócenie twierdzenia. Okazało się, że można odwrócić. Piszę o tym, bo bardzo mi się to podejście do zadania podoba. Ale i tak zadałem (po jakimś czasie) pytanie: a gdzie korzysta się z tego, że punkty A, B, C, D leżą w jednej płaszczyźnie. Niby korzysta się mówiąc o przecięciu prostych AD i BC. No dobrze, ale po co? Przecież można napisać, że proste AD i BC są prostopadłe (choć być może są skośne) wtedy i tylko wtedy, gdy $(A - D) \cdot (B - C) = 0$, kropka oznacza iloczyn skalarny. Tę równość można przepisać w postaci $A \cdot B + C \cdot D = B \cdot D + A \cdot C$. Równość, którą należało dowieść ma postać $(A-C)^2 + (B-D)^2 = (A-B)^2 + (B-D)^2$, podnoszenie do kwadratu polega na mnożeniu skalarnym wektora przez siebie. Ostatnia równość jest równoważna temu, że $A \cdot C + B \cdot D = A \cdot B + B \cdot D$, więc otrzymanej poprzednio z założenia. Co więcej, w ostatniej wersji dowód geometryczny zaczyna już czegoś od ucznia wymagać. Tu algebra jest rzeczywiście pomocna.