Po co komu wymierność?

Pitagorejczycy zauważyli, że bok kwadratu i jego przekątna są niewspółmierne, co oznacza, że nie da się znaleźć wspólnej miary dla nich, więc takiego odcinka, który można odłożyć całkowitą liczbę razy na boku i na przekątnej wypełniając je całkowicie. Współcześnie można to powiedzieć tak:

iloraz przekątnej i boku nie jest ilorazem dwu liczb całkowitych.

Uzasadnienie tego faktu nie jest trudne, więc pojawia się w szkołach.

Przypomnę je. Załóżmy, że a oznacza długość boku, a d długość przekątnej. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Stąd wynika, że d^2 jest liczbą parzystą, ale to jest możliwe tylko wtedy, gdy d jest liczbą parzystą, więc gdy istnieje taka liczba całkowita d_1, że $d = 2d_1$. Mamy więc $4d_1^2 = 2a^2$, zatem $2d_1^2 = a^2$. Z tej równości wnioskujemy, że a jest liczbą parzystą, więc że istnieje taka liczba całkowita a_1, że $a = 2a_1$, zatem $2d_1^2 = a^2 = 4a_1^2$ i wobec tego $d_1^2 = 2a_1^2$. Otrzymaliśmy równość taką samą jak wyjściowa. Możemy powtórzyć rozumowanie i otrzymać wzór $d_2^2 = 2a_2^2$, gdzie $2d_2 = d_1$ i $2a_2 = a_1$. Oznacza to, że $a_2 = \frac{a}{4}$ i $d_2 = \frac{d}{4}$. To postępowanie możemy powtórzyć dowolnie wiele razy, ale to jest niemożliwe, bo przecież za każdym razem zmniejszamy liczby a_n i d_n dwukrotnie, więc w końcu staną się one dodatnie i mniejsze od 1, więc nie będą całkowite. Można to samo rozumowanie opisać nieco inaczej założywszy na wstępie, że ułamek $\frac{d}{a}$ jest nieskracalny, a wtedy stwierdzenie parzystości licznika i mianownika oznacza, że doszliśmy do sprzeczności z założeniem i kończy dowód. To pozwala na uogólnienie udowodnionego twierdzenia.

Twierdzenie 1.1 **(o wymiernych pierwiastkach wielomianu o całkowitych współczynnikach)** Załóżmy, że liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$ oraz

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

dla pewnej liczby x. Jeśli $x = \frac{p}{q}$ i liczby całkowite p, q są względnie pierwsze (ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny), to p jest dzielnikiem a_0 i jednocześnie q jest dzielnikiem a_n.

Poprzednio zajmowaliśmy się równaniem $2 - x^2 = 0$. Spełnione były następujące równości $n = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$. Z twierdzenia 1.1 wynika, że q jest dzielnikiem liczby -1, więc jest równe ± 1, a to oznacza, że liczba x jest całkowita. To jednak jest niemożliwe, bo $2-1^2 > 0$, a jeśli $x \geqslant 2$, to $2-x^2 \leqslant 2-2^2 = -2 < 0$. To samo rozumowanie przekonuje nas, że jeśli $n \geqslant 2$, to równanie $2 - x^n = 0$ nie ma pierwiastków wymiernych, a jeśli skorzystamy z nierówności $2^n > n$ dla $n = 2, 3, \ldots$, również o niewymierności pierwiastków równań $n - x^n = 0$, więc liczb $\sqrt[n]{n}$ dla $n = 2, 3, \ldots$.

Dowód. Pomnóżmy równość

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$$

przez q^n:

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0\,.$$

Liczba $a_np^n = -q\left(a_0q^{n-1} + a_1pq^{n-2} + a_2pq^{n-3} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}\right)$ jest podzielna przez q, a ponieważ liczby p, q są względnie pierwsze, więc liczby p^n, q też są względnie pierwsze, a z tego wynika, że q jest dzielnikiem p.

W ten sam sposób z równości $a_0q^n = -p\left(a_1q^{n-1} + a_2pq^{n-2} + \ldots + a_{n-1}p^{n-2}q + a_np^{n-1}\right)$ wynika, że p jest dzielnikiem a_0. $\square$

Zaznaczyć wypada, że to czy jakaś liczba jest wymierna, czy nie, mało obchodzi inżyniera, chemika, farmaceutę, ekonomistę itd. Rzecz w tym, że ci ludzie i tak operują przybliżonymi danymi, a dowolnie blisko każdej liczby da się znaleźć liczby wymierne i niewymierne (np. postaci $\frac{p}{q}$ i $\frac{p}{q}\sqrt{2}$, $p \neq 0, q \neq 0$ – więce). Rzecz jest w tym, że liczbami wymiernymi umiemy nieco lepiej posługiwać się. Co więcej, suma, różnica, iloczyn oraz iloraz liczb wymiernych są wymierne, a suma liczb niewymiernych bywa wymierna. Przedstawianie wielomianów o współczynnikach wymiernych w postaci iloczynu wielomianów o współczynnikach wymiernych jest stosunkowo łatwe dzięki tak zwanemu lematowi Gaussa.

Twierdzenie 1.2 (lemat Gaussa)
Jeśli wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ma współczynniki całkowite i jest iloczynem wielomianów $u(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_kx^k$ oraz $v(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_mx^m$ o współczynnikach wymiernych, to istnieją takie liczby wymierne β i γ, że $\beta \cdot \gamma = 1$ i wielomiany $\beta \cdot u$ oraz $\gamma \cdot v$ mają całkowite współczynniki.

Dowód. Niech liczba q oznacza najmniejszy wspólny mianownik ułamków $b_0, b_1, \ldots, b_k$. Istnieją więc takie liczby całkowite $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$, że $b_j = \frac{\beta_j}{q}$ dla $j = 0, 1, \ldots, k$ oraz $\mathrm{nwd}(q, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k) = 1$. Niech r oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników ułamków $c_0, c_1, \ldots, c_m$. Istnieją więc takie liczby całkowite $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$, że $c_j = \frac{\gamma_j}{r}$ dla $j = 0, 1, \ldots, m$ oraz $\mathrm{nwd}(r, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k) = 1$.

Aby nie komplikować oznaczeń definiujemy dodatkowe współczynniki w trzech wielomianach: $0 = \beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \ldots,\quad 0 = \gamma_{m+1} = \gamma_{m+2} = \ldots,\quad 0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots.$
Zachodzi więc równość

$$w(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots = u(x)v(x) = \left(\frac{\beta_0}{q} + \frac{\beta_1}{q}x + \frac{\beta_2}{q}x^2 + \ldots\right)\left(\frac{\gamma_0}{r} + \frac{\gamma_1}{r}x + \frac{\gamma_2}{r}x^2 + \ldots\right).$$

Jeśli liczba pierwsza p jest wspólnym dzielnikiem liczby q i wszystkich liczb $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$, to możemy zastąpić wielomiany u, v wielomianami pu i $\frac{v}{p}$. Analogicznie postępujemy ze wspólnymi dzielnikami liczb r i $\beta_0, \beta_1, \ldots$

W dalszym ciągu zakładamy, że $\mathrm{nwd}(q, \gamma_0, \gamma_1, \ldots) = 1$ oraz $\mathrm{nwd}(r, \beta_0, \beta_1, \ldots) = 1$. Z równości $w = u \cdot v$ wynika, że:

$\beta_0\gamma_0 = a_0qr,$

$\beta_1\gamma_0 + \beta_0\gamma_1 = a_1qr,$

$\beta_2\gamma_0 + \beta_1\gamma_1 + \beta_0\gamma_2 = a_2qr,$

$\beta_3\gamma_0 + \beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 + \beta_0\gamma_3 = a_3qr,$

. . . .

Jeśli p jest liczbą pierwszą i $p|q$, to $p|\beta_0$ lub $p|\gamma_0$ — wynika to z pierwszej równości. Załóżmy, że $p \mid \beta_0$. Niech i będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $p \nmid \beta_i$. Ponieważ $p \mid \beta_0$, $p \mid \beta_1$, $p \mid \beta_2, \ldots, p \mid \beta_{i-1}$ oraz $p \mid q$, więc z równości

$$\beta_i\gamma_0 + \beta_{i-1}\gamma_1 + \beta_{i-2}\gamma_2 + \ldots + \beta_1\gamma_{i-1} + \beta_0\gamma_i = a_iqr$$

wynika, że $p \mid \gamma_0$. Stąd i z równości

$$\beta_{i+1}\gamma_0 + \beta_i\gamma_1 + \beta_{i-1}\gamma_2 + \beta_{i-2}\gamma_3 + \ldots + \beta_1\gamma_i + \beta_0\gamma_{i+1} = a_{i+1}qr$$

wynika, że $p \mid \gamma_1$. Kontynuując to rozumowanie (indukcja) przekonujemy się, że $p \mid \gamma_j$ dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j, wbrew założeniu, które uczyniliśmy.

Wykazaliśmy, że liczba pierwsza nie może jednocześnie dzielić liczb q i β_0. Takie samo rozumowanie wyklucza możliwość $p \mid q$ i $p \mid \gamma_0$. Oznacza to, że liczba q nie ma dzielników pierwszych, zatem $q = 1$. W taki sam sposób dowodzimy, że $r = 1$. W ten sposób wykazaliśmy, że po wstępnych przeróbkach (wielu) polegających na dzieleniu jednego czynnika przez liczbę pierwszą i jednoczesnym mnożeniu drugiego przez tę samą liczbę pierwszą otrzymujemy wielomiany o współczynnikach całkowitych. □

Bardzo podobnie można uzasadnić zupełnie inne twierdzenie.

Twierdzenie 1.3 (Kryterium Eisensteina)
Załóżmy, że wielomian w ma współczynniki całkowite i istnieje liczba pierwsza p, przez którą są podzielne wszystkie współczynniki w z wyjątkiem współczynniki kierującego, a p^2 nie jest dzielnikiem wyrazu wolnego. Wtedy wielomian w nie jest iloczynem wielomianów o współczynnikach całkowitych, stopnia mniejszego od $\deg w$.

Dowód. Załóżmy, że

$$w(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = (b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k)(c_0 + c_1x + \ldots + c_\ell x^\ell),$$

przy czym wszystkie liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_k, c_0, c_1, \ldots, c_\ell$ są całkowite, $k, \ell > 0$ (rozpoczynamy dowód nie wprost). Zachodzą równości (dla uproszczenia zapisu przyjmujemy, że $0 = b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots$ oraz $0 = c_{\ell+1} = c_{\ell+2} = \ldots$)
$a_0 = b_0c_0,$
$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0,$
$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0,$
$a_3 = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0,$
....
$a_n = b_0c_n + b_1c_{n-1} + b_2c_{n-2} + \ldots + b_nc_0.$
Ponieważ $p \mid a_0$ i $p^2 \nmid a_0 = b_0c_0$, więc dokładnie jedna z liczb b_0, c_0 jest podzielna przez p. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $p \mid b_0$ i $p \nmid c_0$. Wtedy liczba $b_1c_0 = a_1 - b_0c_1$ jest podzielna przez p, zatem $p \mid b_1$. Kontynuujemy to rozumowanie, co pozwala na stwierdzenie, że p jest dzielnikiem wszystkich współczynników wielomianu $b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k$, co jest możliwe, gdyż $k < n$. Ale w ten sposób wykazaliśmy, że liczba $a_n = b_kc_\ell$ jest podzielna przez p, wbrew uczynionemu założeniu. Dowód został zakończony. □

Przykład 1.4
Wielomian $65x^5 - 343x^4 + 259x^2 + 133x + 105$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach wymiernych stopnia niższego niż 5. Gdyby był to dałoby się go przedstawić jako iloczyn dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych, stopnia niższego od 5, a to nie możliwe na mocy kryterium Eisensteina ($p = 7$). □

Przykład 1.5
Niech p będzie liczbą pierwszą. Wielomian $1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$ jest nie jest iloczynem wielomianów dodatniego stopnia o współczynnikach całkowitych.

Niech $x = y + 1$. Wtedy

$$1+x+x^2+\ldots+x^{p-1} = \frac{x^p-1}{x-1} = \frac{(y+1)^p-1}{y} = y^{p-1}+py^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-3}+\ldots+\frac{p(p-1)\ldots 2}{(p-1)!}.$$

Jasne jest, że $p \nmid 1$, p dzieli każdą z liczb $p, \frac{p(p-1)}{2!}, \ldots, \frac{p(p-1)\ldots 2}{(p-1)!}$ oraz że $p^2 \nmid \frac{p(p-1)\ldots 2}{(p-1)!}$, więc na mocy kryterium Eisensteina wielomian $y^{p-1} + py^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2!}y^{p-3} + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots 2}{(p-1)!}$ (zmiennej y), nie jest iloczynem wielomianów stopnia niższego o współczynnikach całkowitych. Wobec tego to samo dotyczy wielomianu $1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$. $\square$

Twierdzenie 1.6 (1737, L. Euler)
Liczba $e \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ jest niewymierna.

Dowód. Tym razem będziemy szacować, a nie przekształcać algebraicznie i zastanawiać się nad podzielnością. Zaczniemy od następującego oszacowania:

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\ldots<\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!(n+2)}+\frac{1}{(n+1)!(n+2)^2}+\ldots=$$

$$\overset{\text{suma szeregu}}{\underset{\text{geometrycznego}}{=\!=\!=}}\frac{1}{(n+1)!\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}=\frac{n+2}{n!(n+1)^2}<\frac{n+2}{n!(n^2+2n)^2}=\frac{1}{n!\cdot n}.$$

Załóżmy, że $p,q\in\mathbb{N}$ oraz $e=\frac{p}{q}$. Wtedy

$$e-\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots\frac{1}{q!}\right)=\left|\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots\frac{1}{q!}\right)\right|=\frac{m}{q!}$$

dla pewnej liczby naturalnej $m>0$. Ponieważ $2<e<3$, więc $q>1$. To jednak prowadzi do wniosku:

$$\frac{1}{q!\cdot q}>\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\frac{1}{(q+3)!}+\ldots=e-\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots\frac{1}{q!}\right)=\frac{m}{q!}\geqslant\frac{1}{q!}>\frac{1}{q!\cdot q}.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Euler dowodził nieco inaczej, użył ułamków łańcuchowych, dokładniej wzoru

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}}$$

i w rzeczywistości udowodnił również niewymierność liczby e^2. Kilkadziesiąt lat później, w 1761 roku, pojawił się dowód niewymierności liczby π. J. Lambert podał go i wielu ludziom dosyć długo wydawało się, że są w nim luki, których tam nie ma. Jest tam w szczególności dowód wzoru

$$\operatorname{tg} x = x\cdot\cfrac{1}{1-\frac{x^2}{1\cdot3}\cdot\cfrac{1}{1-\frac{x^2}{3\cdot5}\cdot\cfrac{1}{1-\frac{x^2}{5\cdot7}\cdot\cfrac{1}{1-\frac{x^2}{7\cdot9}\cdot\frac{1}{1-\ldots}}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\ldots}}}}}$$

.

Z braku czasu nie udowodnimy tych wzorów. Powiemy tylko, że praca nad dowodem tego wzoru pozwoliła J.Lambertowi udowodnić niewymierność liczby π.

Warto jednak zwrócić uwagę na istotną różnicę podanego dowodu niewymierności liczby e i dowodu niewymierności pierwiastków różnych stopni. Niewymierność e uzyskaliśmy dzięki szacowaniom, a nie w wyniku przekształceń algebraicznych i analizy podzielności przez różne liczby pierwsze.

Zakończymy twierdzeniem Liouville'a, które autor wymyślił zajmując się ułamkami łańcuchowymi. Ono mówi, że pierwiastków wielomianów o współczynnikach całkowitych nie można za dobrze przybliżać liczbami wymiernymi. To wydaje się nie mieć sensu, ale jednak ma.

Twierdzenie 1.7 (Liouville'a, 1844)
Załóżmy, że $a_0,a_1,\ldots,a_n$ są liczbami więcymi i $a_n\neq0$ oraz $n\geqslant2$. Jeśli x_0 jest niewymiernym pierwiastkiem równania $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$, to istnieje taka stała $c>0$, że dla dowolnych

liczb całkowitych p i $q>0$zachodzi nierówność

$$\left|x_0-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{c}{q^n}$$

Dowód. Niech $w(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ dla każdej liczby x. Równanie

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=w(x)=0$$

ma skończenie wiele (nie więcej niż n) pierwiastków. Niech $d>0$ będzie liczbą, która jest mniejsza od odległości liczby x_0 od każdego innego pierwiastka tego równania. Załóżmy, że $p,q\in\mathbb{Z}$ i $\left|x_0-\frac{p}{q}\right|<d$. Wtedy $0\neq w\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{m}{q^n}$ dla pewnej liczby więcej $m\neq 0$. Stąd i z nierówności $\left|\frac{p}{q}\right|<|x_0|+d$, $|x_0|<|x_0|+d$ wynika, że

$\frac{1}{q^n}\leqslant\left|w\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|w(x_0)-w\left(\frac{p}{q}\right)\right|=$

$$=\left|x_0-\tfrac{p}{q}\right|\cdot\left|a_1+a_2\left(x_0+\tfrac{p}{q}\right)+a_3\left(x_0^2+x_0\cdot\tfrac{p}{q}+\left(\tfrac{p}{q}\right)^2\right)+\ldots+a_n\left(x_0^{n-1}+x_0^{n-2}\cdot\tfrac{p}{q}+\ldots+\left(\tfrac{p}{q}\right)^{n-1}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|x_0-\tfrac{p}{q}\right|\cdot\Big(|a_1|+2|a_2|(|x_0|+d)+3|a_3|(|x_0|+d)^2+\ldots+n|a_n|(|x_0|+d)^{n-1}\Big)=\left|x_0-\tfrac{p}{q}\right|\cdot M,$$

gdzie przez M oznaczyliśmy wartość długiego wyrażenia w nawiasie. Zachodzi oczywiście nierówność $M\geqslant n|a_n|(|x_0|+d)^{n-1}>0$, więc $\left|x_0-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{Mq^n}$. Wystarczy teraz przyjąć, że $c=\min(\frac{1}{M},d)$, by teza była prawdziwa dla wszystkich ułamków $\frac{p}{q}$, a nie tylko znajdujących się w pobliżu x_0. $\square$

Wniosek 1.8
Liczba $L=\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{-n!}$ **nie** jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych, czyli jest liczbą przestępną.

Dowód. Liczba L jest niewymierna, bo jej rozwinięcie dziesiętne nie jest okresowe (od żadnego miejsca). Spełnione są więc założenia twierdzenia Liouville'a, czyli jeśli jest pierwiastkiem wielomianu stopnia $n\geqslant 2$, to istnieje taka liczba dodatnia $c>0$, że dla dowolnych liczb całkowitych p, $q>0$ zachodzi nierówność $\left|L-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{c}{q^n}$. Niech $k>n$ będzie liczbą całkowitą i niech $q=10^{k!}$ oraz $\frac{p}{q}=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\ldots+\frac{1}{10^{k!}}=\frac{p}{10^{k!}}$ dla pewnej liczby więcej $p>0$, oczywięcie $p=10^{k!-1!}+10^{k!-2!}+10^{k!-3!}+\ldots+1$. Wobec tego

$$\frac{c}{10^{n\cdot k!}}=\frac{c}{q^n}\leqslant L-\frac{p}{q}=L-\left(\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\ldots+\frac{1}{10^{k!}}\right)<\frac{2}{10^{(k+1)!}},$$

zatem $10^{2\cdot k!}\leqslant 10^{k!(k+1-n)}<\frac{2}{c}$, ale to nie jest możliwe, bo lewa strona może być dowolnie duża, a prawa nie zależy od k. Zakończyliśmy dowód. $\square$

Twierdzenie Liouville'a zostało poprawione wielokrotnie. Co prawda kwestia przestępności liczb praktycznego znaczenia nie ma, ale metody rozwinięte przy okazji jej badania mają i to duże. Nie tylko w matematyce, ale też w niektórych działach fizyki teoretycznej.

Dodajmy jeszcze, że dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taki ciąg $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$, że $p_n,q_n\in\mathbb{Z}$, $q_n>n$ oraz $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$.

Deser:

Twierdzenie 1.9 (Thue - 1909, Siegela - 1921, Rotha – 1955)
Dla każdego niewymiernego pierwiastka x_0 niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych i każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $C(x_0,\varepsilon)$, że dla dowolnych liczb całkowitych p

i $q > 0$ zachodzi nierówność

$$\left|x_0 - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C(x_0, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Wymienieni matematycy zmniejszali wykładnik występujący w twierdzeniu Liouville'a. Klaus Roth za swój wynik otrzymał w 1958 r. medal Fieldsa.